解答例

STEP I 1999、第 3 問

純粋数学 • 巡回的な連立方程式

> **STEP I 1999、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q3

鍵となる考え方

各方程式は $f(x) = 1 + 1/x$ として $x_k = f(x_{k+1})$ という形をしており、連立方程式全体は一周して閉じたループをなす。隣り合う項の差は単純な規則に従う。すなわち、各差は次の差を 1 より大きい二つの数の積で割ったものである。したがって、ループを一周する間に差は縮むことしかできない。出発点に戻ってくるのだから、差はすべて 0 でなければならない。

以下を通して、添字は巡回的（cyclic）に読む。つまり x_{n+1} は x_1 を、x_{n+2} は x_2 を意味する。すると連立方程式のどの式も、ただ一つの形

$$x_k = 1 + \frac{1}{x_{k+1}}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

で表される。

解答

小問 (i)

x_k はすべて正であるから、すべての k について $1/x_{k+1} > 0$ である。よって

$$x_k = 1 + \frac{1}{x_{k+1}} > 1 \qquad \text{ただし} k = 1, 2, \ldots, n,$$

であり、添字を巡回的に読んでいるので、これは $x_1, \ldots, x_n$ のすべてを尽くしている（最後のものは $x_n = 1 + 1/x_1$ である）。ゆえに $x_1, x_2, \ldots, x_n > 1$ である。

小問 (ii)

第 1 式から第 2 式を引くと

$$x_1 - x_2 = \left(1 + \frac{1}{x_2}\right) - \left(1 + \frac{1}{x_3}\right) = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3} = \frac{x_3 - x_2}{x_2 x_3} = -\frac{x_2 - x_3}{x_2 x_3},$$

となり、これが求める結果である。用いたのは $x_1 = 1 + 1/x_2$ と $x_2 = 1 + 1/x_3$ だけである（さらに $n \geq 3$ であるから、x_3 は別の変数である）。連続する任意の二つの式に対してまったく同じ計算を行えば、すべての k について

$$x_k - x_{k+1} = -\frac{x_{k+1} - x_{k+2}}{x_{k+1} x_{k+2}} \qquad \text{(添字は巡回的)}.$$

が得られる。

小問 (iii)

隣り合う項の差を $d_k = x_k - x_{k+1}$ と書く。したがって $d_n = x_n - x_1$ である。(ii) の一般形は $d_k = -d_{k+1}/(x_{k+1}x_{k+2})$ となる。絶対値（absolute value）をとり、小問 (i) から $x_{k+1}x_{k+2} > 1$ であることを用いると

$$|d_k| = \frac{|d_{k+1}|}{x_{k+1}x_{k+2}} \leq |d_{k+1}|,$$

であり、$d_{k+1} \neq 0$ のときはつねに**狭義の**不等式（strict inequality）が成り立つ。これらをループに沿ってつなげると

$$|d_1| \leq |d_2| \leq |d_3| \leq \cdots \leq |d_n| \leq |d_1|.$$

両端は同じものであるから、この連鎖の不等式はすべて等号で成り立つ。特に $|d_1| = |d_2|$ である。ところが $d_2 \neq 0$ ならば狭義に $|d_1| < |d_2|$ となるはずだから、$d_2 = 0$ である。すると $|d_k|$ はすべて $|d_2|$ に等しいので、すべて 0 である。

考えてみよう 連立方程式が $x_n = 1 + 1/x_1$ によって閉じていることを、正確にはどこで使っただろうか。

使ったのは連鎖の最後の一つ $|d_n| \leq |d_1|$ だけであり、これは $x_n = 1 + 1/x_1$ から得られる。これがなければ、差は k が増えるにつれて単に大きくなっていってもかまわない。実際、閉じていない連鎖 $x_1, \ldots, x_n$ は定数である必要はない。出発点に戻ってくることこそが、縮小がまったく起こらないことを強いるのである。

よって、すべての k について $x_k = x_{k+1}$、すなわち $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ である。

x_1 の値

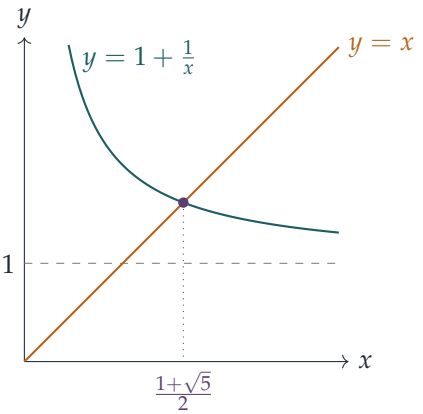
共通の値を x とおく。どの式も $x = 1 + 1/x$ となるので

$$x^2 - x - 1 = 0, \qquad x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

小問 (i) より $x > 1$ であるから負の解は除かれ、

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

逆に、すべての x_k をこの値とおけば n 個の式すべてが実際に満たされるので、この連立方程式は確かにこの解をもち、(iii) により他の解はもたない。幾何学的には、x は曲線 $y = 1 + 1/x$ と直線 $y = x$ の交点である。



検算

- $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6180$ とすると $1 + 1/x \approx 1 + 0.6180 = 1.6180$ となり、確かに成り立つ。
- (ii) の恒等式は、閉じていない任意の連鎖で確かめられる。$x_3 = 2$ とすると $x_2 = \frac{3}{2}$、$x_1 = \frac{5}{3}$ である。このとき $x_1 - x_2 = \frac{1}{6}$ であり、$-(x_2 - x_3)/(x_2 x_3) = \frac{1/2}{3} = \frac{1}{6}$ である。
- ループを一周すると、$f(x) = 1 + 1/x$ として $x_1 = f^n(x_1)$ となる。$n = 3, \ldots, 11$ について区間 $(0, 20)$ で $f^n(x) - x$ を数値的に調べると、符号の変化は $x \approx 1.618$ の一か所だけであり、他に解がないことが確認できる。

よくある間違い

- $|d_1| \le |d_2|$ だけから (iii) を証明しようとする。一段階だけでは差が大きくならないことしか言えない。ループを一周して $|d_1|$ に戻ってくる必要がある。
- x_k がすべて等しいと仮定してから x_1 を求める。それを正当化するのが小問 (iii) であり、そのためには小問 (i) から得られる狭義の不等式 $x_{k+1}x_{k+2} > 1$ が必要である。
- 負である $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ を除くのを忘れる。

STEP のその先へ

この問題の核心は、$|f(a) - f(b)| = |a-b|/(ab)$ であるから、$f(x) = 1 + 1/x$ が $x > 1$ において点どうしを近づけるという点にある。このような写像を**縮小写像**（contraction）といい、バナッハ（Banach）の不動点定理（Banach fixed-point theorem）によれば、完備（complete）な空間上の縮小写像はただ一つの不動点（fixed point）をもち、どこから出発しても反復はその点に収束（converge）する。ここで $x = 1$ から反復すると、連続するフィボナッチ（Fibonacci）数の比 $1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \ldots$ が得られ、黄金比（golden ratio）の連分数（continued fraction）$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}$ が得られる。解析学については Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を読むとよい。連分数については Davenport, *The Higher Arithmetic*（初等整数論）を読むとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。