解答例

STEP I 1999、第 2 問

純粋数学 ・ 軌跡と重心

> **STEP I 1999、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q2

鍵となる考え方

条件を書き下して展開すると、x^2 と y^2 の係数がともに 3 で、xy の項がない式が得られる。これは円であることの目印である。平方完成（completing the square）をすれば中心の位置がわかり、1 次の項にちょうど $x_1 + x_2 + x_3$ が現れるので、重心（centroid）が自然に登場する。a^2 に対する制約は、「半径の 2 乗」が負になってよいのはどのようなときかを問えば、おのずと導かれる。

解答

軌跡

$P = (x, y)$ を軌跡（locus）上の点とし、$i = 1, 2, 3$ に対して $A_i = (x_i, y_i)$ とおく。条件は

$$\sum_{i=1}^{3} \left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \right] = a^2.$$

である。これを展開し、$x_1 + x_2 + x_3 = 3\bar{x}$ および $y_1 + y_2 + y_3 = 3\bar{y}$ を用いると

$$3x^2 - 6\bar{x}\,x + 3y^2 - 6\bar{y}\,y + \sum_i (x_i^2 + y_i^2) = a^2.$$

となる。これが軌跡の方程式である。これが何を表すかを見るために、3 で割って平方完成すると

$$(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 = \frac{a^2 - \sum_i (x_i^2 + y_i^2) + 3\bar{x}^2 + 3\bar{y}^2}{3}.$$

を得る。分子はきれいに整理できる。$\sum_i x_i = 3\bar{x}$ であるから

$$\sum_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_i x_i^2 - 2\bar{x} \cdot 3\bar{x} + 3\bar{x}^2 = \sum_i x_i^2 - 3\bar{x}^2,$$

であり、y についても同様である。そこで、3点からその重心 $G=(\bar{x},\bar{y})$ までの距離の2乗の和を

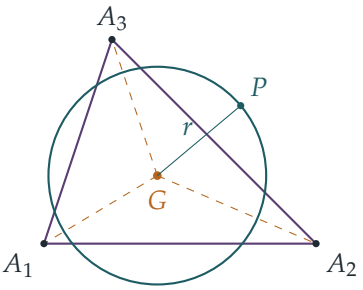
$$S=\sum_{i=1}^{3}\left[(x_i-\bar{x})^2+(y_i-\bar{y})^2\right]$$

とおけば、軌跡は

$$\boxed{(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2=\frac{a^2-S}{3}}.$$

となる。

解釈。$a^2>S$ のとき、これは3点の重心 G を中心とし、半径 $\sqrt{(a^2-S)/3}$ の円である。a^2 を変化させると、G を中心とする同心円（concentric circles）の族が得られる。境界の場合 $a^2=S$ では、「円」は1点 G に縮退する。



a^2 が S より小さくなり得ない理由

考えてみよう 枠で囲んだ方程式の右辺が負であるとは、どういうことか。

左辺 $(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2$ は実数の2乗の和であるから、決して負にならない。$a^2<S$ ならば右辺は負となり、方程式を満たす実数の点 (x,y) は存在しない。すなわち軌跡は空集合である。したがって、点が題意のように動くことがそもそも可能であるためには、$a^2\geq S$ でなければならない。

同じ計算を逆向きに読むと、見通しがよくなる。実際に示したのは、すべての点 P に対して成り立つ恒等式（identity）

$$PA_1^2+PA_2^2+PA_3^2=3\,PG^2+S.$$

である。$PG^2\geq 0$ であるから、和 $PA_1^2+PA_2^2+PA_3^2$ はつねに S 以上であり、等号が成り立つのは $P=G$ のときに限る。言い換えれば、重心は3点までの距離の2乗の和を最小にする点であり、その最小値は S である。この最小値より小さい一定の和 a^2 はあり得ない。

検算

- $A_1=(0,0)$、$A_2=(4,0)$、$A_3=(1,3)$ とすると、$G=(\frac{5}{3},1)$ であり、$S=\frac{34}{9}+\frac{58}{9}+\frac{40}{9}=\frac{44}{3}$ である。$P=G$ における距離の 2 乗の和はちょうど $\frac{44}{3}\approx 14.67$ である。$P=(0,0)$ では和は $0+16+10=26$ であり、$3PG^2+S=3\cdot\frac{34}{9}+\frac{44}{3}=26$ となって、恒等式の予言どおりである。
- もう一つ便利な形として $S=\frac{1}{3}\left(A_1A_2^2+A_2A_3^2+A_3A_1^2\right)$ がある。上の例では辺の長さの 2 乗は 16、18、10 であり、やはり $\frac{44}{3}$ を得る。
- 無作為に選んだ 2000 組の 3 点について、分数を用いて恒等式を厳密に確かめた。また、円上の点で和が a^2 となること、および和の最小値が S であり、それが G で達成されることを数値的に確認した。

よくある間違い

- 半径を $\sqrt{\left(a^2-\sum(x_i^2+y_i^2)\right)/3+\bar{x}^2+\bar{y}^2}$ のままにして、S を用いた形に気づかないこと。そうすると最後の部分の見通しが非常に悪くなる。
- 退化（degenerate）した場合 $a^2=S$ を忘れること。このとき軌跡は円ではなく 1 点である。

STEP のその先へ

恒等式 $\sum PA_i^2=3PG^2+\sum GA_i^2$ は、慣性モーメント（moment of inertia）に関する平行軸の定理（parallel axis theorem）の一つの形である。また統計学では、平方和を「群間」と「群内」の部分に分解することにあたる。平均は偏差の 2 乗の和を最小にする値であり、これこそが最小二乗法（least squares）によるあてはめがうまくいく根本的な理由である。線形代数においては、これは姿を変えたピタゴラス（Pythagoras）の定理である。なぜなら、G から P へのベクトル（vector）は、和が零になる偏差 A_i-G と（適切な意味で）直交（orthogonal）するからである。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）では、最小二乗法をこの射影（projection）の観点から展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。