解答例

STEP I 1999、第 14 問

確率・統計 ・ 条件付き確率

> **STEP I 1999、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q14

鍵となる考え方

連続確率変数（continuous random variable）は、離散的な（discrete）確率変数を設定するためだけに登場している。確率密度関数（probability density function）を、得点 4, 3, 2, 1 を取る 4 つの確率に直してしまえば、小問 (i) は 1 行で済む期待値（expectation）の計算である。小問 (ii) は条件付き確率（conditional probability）の問題であり、合計がちょうど 3 にならなければならないので、勝つ方法はごくわずかしかなく、すべて書き出すことができる。

解答

小問 (i)

$0 \le a \le b \le 1$ に対して

$$\mathrm{P}(a \le X < b) = \int_a^b 2x \,\mathrm{d}x = b^2 - a^2.$$

（連続確率変数では、端点を含めるか含めないかは結果に影響しない。）1 本のダーツによる得点を S とする。すると

$$\mathrm{P}(S=4) = \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 - 0 = \tfrac{1}{16}, \qquad \mathrm{P}(S=3) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 = \tfrac{3}{16},$$

$$\mathrm{P}(S=2) = \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{5}{16}, \qquad \mathrm{P}(S=1) = 1 - \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 = \tfrac{7}{16}.$$

これらの和は当然 1 になる。外側の輪ほど当たりやすいことに注意せよ。中心から遠いところほど面積が大きいので、密度 $2x$ は x とともに増加するのである。

よって

$$\mathrm{E}(S) = 4\cdot\tfrac{1}{16} + 3\cdot\tfrac{3}{16} + 2\cdot\tfrac{5}{16} + 1\cdot\tfrac{7}{16} = \frac{4+9+10+7}{16} = \frac{30}{16} = \frac{15}{8},$$

となり、示すべき結果が得られた。

小問 (ii)

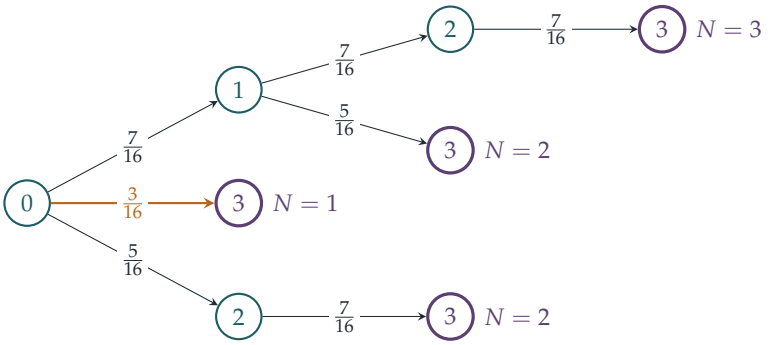
各投てきは独立（independent）であり、それぞれ上の S と同じ分布に従うと仮定する。私が勝つという事象（event）を W、ゲームでの投てき回数を N とする。

考えてみよう どのような得点の列が勝ちにつながるか？

私が勝つのは、途中の合計が一度も超えることなく 3 に達するときであり、そのときに限る。どの得点も 1 以上なので、合計は毎回少なくとも 1 ずつ増え、ゲームは高々 3 回の投てきで終わる。勝ちのゲームとは、和がちょうど 3 になる正の得点の列である。（合計が 3 未満の間だけ投げ続けるので、そのような列はどれも実際に完結したゲームになっている。）そのような列は次の 4 つしかない。

$$(3), \qquad (1,2), \qquad (2,1), \qquad (1,1,1).$$

得点 4 は一度も現れない。それが出た時点で合計が 3 を超えてしまうからである。



この樹形図は、勝ち（紫の丸で囲んだもの）で終わる各経路に沿った途中の合計を示しており、各投てきの確率を書き添えてある。

独立性により、各列の確率はその列の得点の確率の積である。

$$\mathrm{P}(W\cap N=1) = \mathrm{P}(3) = \tfrac{3}{16} = \tfrac{768}{4096},$$
$$\mathrm{P}(W\cap N=2) = \mathrm{P}(1,2)+\mathrm{P}(2,1) = 2\cdot\tfrac{7}{16}\cdot\tfrac{5}{16} = \tfrac{70}{256} = \tfrac{1120}{4096},$$
$$\mathrm{P}(W\cap N=3) = \mathrm{P}(1,1,1) = \left(\tfrac{7}{16}\right)^3 = \tfrac{343}{4096}.$$

これら 3 つの事象は互いに排反（disjoint）であり、合わせると W になるので

$$\mathrm{P}(W) = \frac{768 + 1120 + 343}{4096} = \frac{2231}{4096}.$$

したがって

$$\mathrm{P}(N = 3 \mid W) = \frac{\mathrm{P}(W \cap N = 3)}{\mathrm{P}(W)} = \frac{343/4096}{2231/4096} = \frac{343}{2231},$$

となり、示すべき結果が得られた。

検算

- 4 つの得点の確率 $\frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \frac{5}{16}, \frac{7}{16}$ の和は 1 である。これらが 16 を分母とする奇数になっているのは、$(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1$ だからである。
- 目標の値 $343 = 7^3$ を見れば、3 回の投てきでの勝ちは $(1,1,1)$ でなければならないことがすぐにわかり、設定の正しさが確かめられる。
- 10^6 回のゲームをコンピュータでシミュレーションしたところ、$\mathrm{P}(W) \approx 0.5452$（正確な値は 0.5447）、$\mathrm{P}(N = 3 \mid W) \approx 0.1535$（正確な値は $343/2231 \approx 0.1537$）となった。

よくある間違い

- 各得点の範囲が等しい確率で起こるとみなしてしまう。確率は密度関数を積分して得られるのであり、区間の幅から得られるのではない。
- $(1,2)$ は数えたのに $(2,1)$ を忘れてしまい、$\mathrm{P}(W) = \frac{1671}{4096}$ としてしまう。
- $\mathrm{P}(W)$ で割らずに、$\mathrm{P}(N = 3 \text{ かつ} W) = \frac{343}{4096}$ を答えてしまう。

STEP のその先へ

小問 (ii) は小さなマルコフ連鎖（Markov chain）である。状態は途中の合計であり、3 と「バースト（超過）」が吸収状態（absorbing state）である。目標の値が大きくなると、経路を書き出すのは現実的でなくなる。そこで、合計 t から勝つ確率を w_t と書くと、漸化式（recurrence）$w_t = \sum_s \mathrm{P}(S = s)\, w_{t+s}$ が得られる。この第一歩解析（first-step analysis）は、大学 1 年次の確率論における重要な道具である。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）では、ランダムウォーク（random walk）とマルコフ連鎖を扱う中でこれを解説している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。