解答例

STEP I 1999、第 12 問

確率・統計 ・ いかさまサイコロの不等式

> **STEP I 1999、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q12

この問題は、*Beyond STEP* の第 9.13 節「いかさまサイコロ」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch09/loaded-dice.html

鍵となる考え方

最初の行の不等式（inequality）こそが、この問題全体を動かす原動力である。もしすべての目の和が等確率で出るとすると、2 つの「隅」の和 2 と 12 によって、それぞれ確率の積が $\frac{1}{11}$ に定まってしまう。すると和 7 の確率には 2 つの交差項が含まれ、その和は $c\,(x + x^{-1})$ の形になる。不等式により、この和は大きすぎることになるのである。小問 (ii) は同じ考え方を別の形で用いたものである。すなわち、平方和はすべてが等しいときに最小となる。

解答

小問 (i)

不等式。 $x > 0$ のとき平方根をとることができ、

$$x + x^{-1} - 2 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geq 0,$$

であるから $x + x^{-1} \geq 2$ が成り立ち、等号は $\sqrt{x} = 1/\sqrt{x}$、すなわち $x = 1$ のときに限り成立する。（同じことだが、$(x-1)^2 \geq 0$ に正の数 x^{-1} を掛けてもよい。）

さいころ。 $2 \leq s \leq 12$ に対し、目の和が s となる確率を p_s とする。2 つのさいころは独立（independent）であるから、組（1 つ目が i、2 つ目が j）の確率は $q_i r_j$ である。下

の表は、必要な和がどの組から得られるかを示している。

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
r_1	2	3	4	5	6	7
r_2	3	4	5	6	7	8
r_3	4	5	6	7	8	9
r_4	5	6	7	8	9	10
r_5	6	7	8	9	10	11
r_6	7	8	9	10	11	12

和 2：1 マス
和 12：1 マス
和 7：6 マス

和 2 は $(1,1)$ からのみ、和 12 は $(6,6)$ からのみ生じるので、

$$p_2 = q_1 r_1, \qquad p_{12} = q_6 r_6.$$

である。和 7 は $(1,6)$ と $(6,1)$ を含む 6 つの組から生じる。6 つの項はすべて非負であるから、

$$p_7 = q_1 r_6 + q_2 r_5 + \cdots + q_6 r_1 \ \geq \ q_1 r_6 + q_6 r_1.$$

が成り立つ。

ここで背理法（proof by contradiction）により、11 通りの和がすべて等確率で出ると仮定する。これらは起こりうるすべての場合を尽くしているので、それぞれの確率は $\frac{1}{11}$ である。すると $q_1 r_1 = \frac{1}{11}$ かつ $q_6 r_6 = \frac{1}{11}$ となる。特に q_1, r_1, q_6, r_6 はいずれも 0 ではないので、$r_1 = \dfrac{1}{11 q_1}$、$r_6 = \dfrac{1}{11 q_6}$ と書ける。これを代入すると、いま証明した不等式により

$$\begin{aligned} p_7 \ \geq \ q_1 r_6 + q_6 r_1 &= \frac{q_1}{11 q_6} + \frac{q_6}{11 q_1} = \frac{1}{11}\left(x + x^{-1}\right), \qquad \text{ただし} x = \frac{q_1}{q_6} > 0, \\ &\geq \frac{2}{11} \end{aligned}$$

となる。しかし $p_7 = \frac{1}{11} < \frac{2}{11}$ であり、矛盾する。したがって、2 つのさいころにどのような細工（loaded）をしても、和 $2, 3, \ldots, 12$ がすべて等確率になることはありえない。

考えてみよう q_1 と q_6 が 0 でないことを確認するのは、なぜ重要だったのか。

q_1 と q_6 で割ったうえ、不等式 $x + x^{-1} \geq 2$ には $x > 0$ が必要だからである。積 $q_1 r_1$ と $q_6 r_6$ がいずれも $\frac{1}{11} \neq 0$ に等しいことから、どちらも保証される。この手順を省くと議論に穴が生じる。一般には、1 の目がまったく出ないさいころも十分ありうるのである。

小問 (ii)

1 つ目のさいころを 2 回投げて同じ目が出る事象を S とする。2 回の投げは独立であるから、両方とも j が出る確率は q_j^2 であり、これら 6 つの事象は互いに排反（disjoint）

である。よって

$$\mathrm{P}(S) = q_1^2 + q_2^2 + \cdots + q_6^2.$$

である。$q_j \geq 0$ かつ $\sum q_j = 1$ という条件のもとで、この値がどこまで小さくなりうるかを求めたい。さいころが公平なものからどれだけずれているかを測る平方和を展開すると、

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{j=1}^{6} \left(q_j - \tfrac{1}{6}\right)^2 &= \sum_{j=1}^{6} q_j^2 - \tfrac{1}{3}\sum_{j=1}^{6} q_j + 6 \cdot \tfrac{1}{36} \\ &= \sum_{j=1}^{6} q_j^2 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6} = \mathrm{P}(S) - \tfrac{1}{6}. \end{aligned}$$

となる。したがって $\mathrm{P}(S) \geq \frac{1}{6}$ であり、等号が成り立つのはすべての $q_j = \frac{1}{6}$ のとき、すなわち公平なさいころのときに限る。

考えてみよう 1/36 はどこから来たのか。また、それはなぜ見せかけの手がかりなのか。

$\frac{1}{36}$ は、公平なさいころで 6 のゾロ目のような**特定の** 1 組が出る確率である。「同じ目が出る」にはそのような組が 6 つ含まれるので、公平なさいころではその確率は $6 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$ であり、さいころに細工をするとこの確率は増えることしかない。

よって答えは**否**である。q_j の値がどうであっても、2 つの目が同じになる確率は少なくとも $\frac{1}{6}$ であり、これは $\frac{1}{36}$ よりはるかに大きい。

検算

- 公平なさいころの場合：$p_2 = p_{12} = \frac{1}{36}$ であるが $p_7 = \frac{6}{36}$ であり、結果が予言するとおり明らかに等しくない。
- 細工されたさいころの組を無作為に 20,000 組とって数値的に探索したが、11 通りの和がすべて $\frac{1}{11}$ との差 0.05 以内に収まる例は一度もなかった。また分数を用いた厳密な確認でも、毎回 $p_7 \geq q_1 r_6 + q_6 r_1$ が成り立った。
- $(q_1, \ldots, q_6) = (0.1, 0.2, 0.3, 0.15, 0.15, 0.1)$ のさいころでは $\mathrm{P}(S) = 0.195 \geq \frac{1}{6}$ となる。2 回投げを 200,000 回シミュレーションしたところ 0.194 が得られた。

よくある間違い

- 2 つのさいころが同一である（$q_i = r_i$）と仮定してしまうこと。問題文では異なる細工が許されており、上の議論でも両者が一致する必要はない。

- $p_7 = q_1 r_6 + q_6 r_1$ と書いてしまうこと。項はあと 4 つある。必要なのは不等式だけなので捨ててよいが、その理由（$q_i r_j \geq 0$）は述べること。
- 小問 (ii) で $\sum q_j^2 \geq \frac{1}{36}$ と答えてしまうこと、あるいは「同じ」が 6 通りの結果のどれでもよいことを忘れること。

STEP のその先へ

小問 (ii) は $\sum q_j^2 \geq \frac{1}{n}\left(\sum q_j\right)^2$ という主張であり、コーシー＝シュワルツの不等式（Cauchy–Schwarz inequality）の特別な場合である。量 $\sum q_j^2$ は**衝突確率**（collision probability）と呼ばれ、情報理論（information theory）やハッシュ法（hashing）の解析に現れる。小問 (i) は母関数（generating function）に関する古典的な結果である。2 つのさいころの目の和の確率母関数（probability generating function）は $Q(t)R(t)$ であり、うまい別証明として次のものがある。和が一様であれば、$1 + t + \cdots + t^{10}$ は定数と 2 つの 5 次の実係数多項式の積でなければならず、そのそれぞれは実数解をもつ。ところが $1 + t + \cdots + t^{10} = (t^{11} - 1)/(t - 1)$ は実数解をもたない。この種の母関数については、Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）で展開されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。