解答例

STEP I 1999、第 11 問

力学 ・ 重力による円運動

> **STEP I 1999、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q11

この問題は、*Beyond STEP* の第 10.8 節「三角形をなす三つの星」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch10/three-stars.html

鍵となる考え方

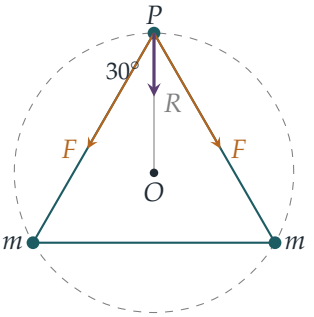
運動を推測し、それを確かめる。三角形がその中心のまわりを剛体的に回転するならば、各星は円運動をするので、中心に向かってちょうど $m\omega^2 R$ の合力が必要である。対称性から、ほかの星から各星にはたらく万有引力（gravitational force）の合力は中心をまっすぐ向く。したがって、その大きさを $m\omega^2 R$ と等しくおいて ω を読み取ればよい。中心に星を置くと、大きさのわかった内向きの引力がもう一つ加わる。

解答

星を、互いの引力のみを受けて運動する質点（particle）とみなす。O を質量中心（centre of mass）とする。等しい質量が三つの場合、これは三角形の重心（centroid）であり、各頂点からの距離は

$$R = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

である。



三つの星

上の頂点にある星を P とする。ほかの二つの星はそれぞれ、大きさ

$$F = \frac{\gamma m^2}{a^2},$$

の力で P を引き、その向きは三角形の辺に沿っている。PO は P における $60°$ の角を二等分するので、P を通る各辺は PO と $30°$ の角をなす。PO に平行な方向と垂直な方向に力を分解する（resolve）と、

- PO に垂直な方向では、二つの成分は大きさが等しく向きが逆なので打ち消し合う。
- PO に沿った方向では、合力は O に向かって $2F\cos 30° = \sqrt{3}\,\dfrac{\gamma m^2}{a^2}$ である。

対称性により、ほかの二つの星も同じ状況にある。

次に、三角形が O のまわりを角速度（angular velocity）ω で剛体的に回転すると仮定する。このとき各星は半径 R の円を一定の速さ $R\omega$ で運動するので、O に向かう加速度 $R\omega^2$ が必要である。O に向かう方向にニュートン（Newton）の運動の第 2 法則を適用すると

$$m\,\frac{a}{\sqrt{3}}\,\omega^2 = \sqrt{3}\,\frac{\gamma m^2}{a^2} \quad\Longrightarrow\quad \omega^2 = \frac{3\gamma m}{a^3}.$$

を得る。

> **考えてみよう** これによって、ある一瞬に力がつり合うというだけでなく、この運動が**実現可能**であることが示されるのはなぜか。

星を各頂点に置き、OP に垂直で大きさ $R\omega$ の速度を、すべて同じ回転の向きに与えて運動を始める。配置が O を中心とする一辺 a の正三角形（equilateral triangle）であり続ける限り、各星にはたらく力は、角速度 ω の円運動に必要な大きさと向きをちょうどもつ。したがって、剛体的に回転する三角形は、どの瞬間においてもすべての星の運動方程式（equation of motion）を満たす。ゆえにこれはこの系の本当の運動であり、

その初期条件から導かれる解そのものである。全運動量は 0 なので、当然ながら O は動かない。以上より、各星は質量中心のまわりを角速度 $(3\gamma m/a^3)^{1/2}$ で公転できる。

中心に四つ目の星を加える

O に質量 λm の星を置く。質量中心は依然として O である。外側の三つの星は中心の星を、互いに 120° をなす等しい大きさの力で引くので、合力は 0 である。したがって、外側の三つが対称な配置を保つ限り、中心の星は O に静止したままである。

外側の各星には、O に向かう大きさ

$$\frac{\gamma(\lambda m)m}{R^2} = \frac{3\gamma\lambda m^2}{a^2},$$

の引力が新たに加わる。ここで $R^2 = a^2/3$ を用いた。この追加の力は PO に沿ってはたらくので、内向きの合力にそのまま加わる。O に向かう方向の運動方程式は

$$m\,\frac{a}{\sqrt{3}}\,\omega^2 = \sqrt{3}\,\frac{\gamma m^2}{a^2} + 3\lambda\,\frac{\gamma m^2}{a^2}$$

$$\omega^2 = \frac{3\gamma m}{a^3} + \frac{3\sqrt{3}\,\lambda\gamma m}{a^3} = \frac{3\gamma m}{a^3}\left(1+\sqrt{3}\,\lambda\right).$$

となる。前と同じ議論により、この剛体的な回転は本当の運動である。よって、四つ目の星が中心に静止している状態で、外側の三つはそのまわりを角速度

$$\omega = \left(\frac{3\gamma m\,(1+\sqrt{3}\,\lambda)}{a^3}\right)^{1/2}.$$

で公転できる。

検算

- $\lambda = 0$ とおくと、当然ながら最初の答えに戻る。
- 次元（dimensions）：$\gamma m/r^2$ は加速度なので、$\gamma m/a^3$ の単位は 時間$^{-2}$ であり、ω^2 の単位として正しい。
- λ が非常に大きいとき、外側の星どうしはほとんど影響を及ぼし合わない。このとき外側の星は中心の質量だけのまわりを $\omega^2 \approx \gamma\lambda m/R^3 = 3\sqrt{3}\,\gamma\lambda m/a^3$ で公転し、これは支配的な項と一致する。
- 完全な運動方程式を（$\gamma = m = a = 1$ として）数値的に積分した。予測された円運動の速度から始めると、$\lambda = 0$、1、2.5 のいずれの場合も、星は 3 回公転したのちに相対誤差 10^{-7} 未満で出発点に戻った。たとえば $\lambda = 1$ のとき $\omega^2 = 3(1+\sqrt{3}) \approx 8.196$ である。

よくある間違い

- 円の半径や中心の星までの距離として、$R = a/\sqrt{3}$ ではなく a を用いてしまう。
- 大きさ F の二つの引力が PO と $30°$ をなすことを忘れ、$2F$ と足してしまう。
- 中心の星が動かない理由、すなわちそれにはたらく三つの引力が打ち消し合うことを述べ忘れる。

STEP のその先へ

これは三体問題（three-body problem）におけるラグランジュ（Lagrange）の正三角形解の特別な場合である。この解は、回転する正三角形の頂点に置かれた**任意の**三つの質量に対して成り立つ。同じ考え方からラグランジュ点（Lagrange points）L_4 と L_5 が得られ、そこではトロヤ群小惑星（Trojan asteroids）が木星と同じ軌道を共有している。このような配置が**安定**（stable）かどうかはより深い問題であり、回転する解のまわりで運動方程式を線形化する（linearise）ことによって答えられる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、このレベルで中心力（central force）と軌道を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。