解答例

STEP I 1999、第 10 問

力学 ・ 単振動

> **STEP I 1999、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q10

鍵となる考え方

質点はばねを AP と PB の 2 本のばねに分ける。どちらのばねも、ばね全体と同じ弾性率（modulus of elasticity）λ をもつ（弾性率は材料の性質だからである）が、自然長（natural length）はそれぞれ a と b である。各部分についてのフックの法則（Hooke's law）を、上端から質点までの距離というただ 1 つの座標で書き表すと、運動方程式（equation of motion）はその座標について 1 次式になることがわかる。座標の係数から周期（period）が求まるので、あとはそれが何に依存し、何に依存しないかを調べればよい。

解答

モデル

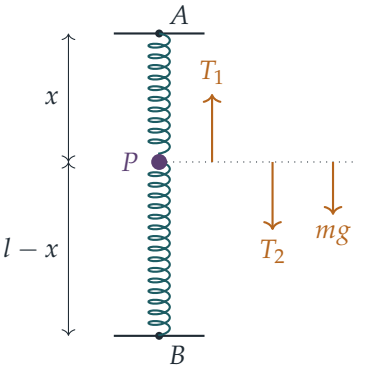
質点の質量を m とする。ばねは軽いので、各部分の張力（tension）はその部分のどこでも等しく、ばねは伸び（extension）と圧縮（compression）のどちらについてもフックの法則に従う（これは糸ではなくばねなので、引くだけでなく押すこともできる）。まず A が上端であるとする。時刻 t における質点の A からの下向きの距離を x とすると、$AP = x$、$PB = l - x$ である。

AP の自然長は a、PB の自然長は b であるから、フックの法則により

$$T_1 = \frac{\lambda(x-a)}{a}, \qquad T_2 = \frac{\lambda(l-x-b)}{b},$$

となる。ここで T_1 は AP の張力、T_2 は PB の張力である。張力が正であれば、その部分は質点をその部分の固定端の方へ引く。負の値であれば、その部分は圧縮されていて質点を押し返す。いずれの場合もこの式は正しい符号付きの力を与えるので、どの

部分が伸びているかを前もって知る必要はない。



単振動

質点にはたらく力を下向きに分解すると、重力 mg、上向きの張力 T_1、下向きの張力 T_2 であるから

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg - \frac{\lambda(x-a)}{a} + \frac{\lambda(l-x-b)}{b} \\ &= mg + \lambda - \frac{\lambda x}{a} + \frac{\lambda l}{b} - \frac{\lambda x}{b} - \lambda \\ &= mg + \frac{\lambda l}{b} - \lambda\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)x. \end{aligned}$$

定数 $\pm\lambda$ は打ち消し合い、右辺は傾きが負の x の 1 次関数である。

$$\omega^2 = \frac{\lambda}{m}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{\lambda(a+b)}{mab}, \qquad x_0 = \frac{mg + \lambda l/b}{\lambda(a+b)/(ab)} = \frac{a(mgb+\lambda l)}{\lambda(a+b)}.$$

とおく。すると運動方程式は

$$\ddot{x} = -\omega^2(x - x_0),$$

となるので、$X = x - x_0$（平衡位置（equilibrium position）x_0 からの変位）とおけば $\ddot{X} = -\omega^2 X$ である。これは $x = x_0$ を中心とする単振動（simple harmonic motion）の方程式であり、その周期は

$$\boxed{\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{mab}{\lambda(a+b)}}}$$

である。これで最初の結果が示された。

考えてみよう 一方の部分が圧縮されると、運動は単振動でなくなるのではないか？

弾性**糸**であればそうなる。糸の張力の式は、糸が伸びている間しか成り立たないからである。ばねは圧縮されているときも同じフックの法則の式に従うので、上の 1 つの

方程式は運動全体を通して成り立ち（ただしコイルが密着しない限りにおいて）、l や振幅（amplitude）を制限する必要はない。

l と向きによらないこと

長さ l は x_0 にしか現れない。l を変えると振動の中心は移動するが、ω、したがって周期は変わらない。

代わりに B が上にある場合は、2 つの部分の役割を入れ替えれば同じ計算がそのまま使える。すなわち上の部分の自然長が b、下の部分の自然長が a となる。これは全体を通して a と b を入れ替えるだけのことである。周期は ab と $a+b$ を通してしか a と b に依存せず、これらはどちらも対称なので、周期は変わらない。（平衡位置は変わる。重力によって伸ばされるのが、自然長 a の部分ではなく自然長 b の部分になるからである。）

したがって、l の値によらず、またどちらの端が上であっても、周期は $2\pi\sqrt{mab/(\lambda(a+b))}$ であり、題意は示された。

検算

- 質点の両側にある 2 本のばねは**並列**にはたらく。ばね定数（stiffness）λ/a と λ/b が足し合わされて $\lambda(a+b)/(ab)$ となり、上の ω^2 と一致する。
- 極限の場合 $b \to \infty$：下の部分は非常に弱くなり、自然長 a の 1 本のばねにつながれた質点に帰着して、周期は $2\pi\sqrt{ma/\lambda}$ となる。
- 単位：λ は力なので、ma/λ の単位は $\mathrm{kg\,m/N} = \mathrm{s}^2$ である。
- 数値的には、$m=1$、$\lambda=50$、$a=1$、$b=2$ のとき、公式は周期 0.72552 を与える。$l=2$、3、4.5 の場合（両方の部分が圧縮される場合を含む）について、どちらの端を上にしても、完全な運動方程式を数値的に解くと有効数字 5 桁まで同じ周期が得られ、定数を無作為に多数選んだ場合も 10^{-5} 以内で一致する。

よくある間違い

- 各部分の弾性率として $\lambda a/(a+b)$ などを用いること。各部分の弾性率は依然として λ であり、変わるのはばね定数 $\lambda/(\text{自然長})$ のほうである。
- 下側の張力の符号を間違えること。伸びている PB は質点を B の方へ、すなわち**下向き**に引く。
- 向きに関する部分の議論を忘れること。両端を入れ替えると a と b が入れ替わるこ

と、そして周期がそれらについて対称であることを述べる必要がある。

STEP のその先へ

系をばねに分けてばね定数を足し合わせることは、連成振動子（coupled oscillators）への第一歩である。ばねに沿って複数の質点があると運動方程式は線形な連立方程式となり、とりうる振動数はある行列の固有値（eigenvalues）として与えられる（これが「基準振動」（normal modes）である）。非常に小さな質点を多数並べた極限では、ばねや棒を伝わる縦波（longitudinal waves）の波動方程式（wave equation）が得られる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、振動と基準振動を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。