解答例

STEP I 1999、第 1 問

純粋数学 • 互いに素な整数の数え上げ

> **STEP I 1999、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q1

鍵となる考え方

2 や 5 で割り切れる（divisible）かどうかは最後の桁だけで決まり、3 や 7 で割り切れるかどうかは 21 を法とする剰余（remainder modulo 21）だけで決まる。したがって、求める整数はブロックごとに一定のパターンで繰り返し現れるので、数え上げは 1 つのブロックを数えて掛け算するだけで済む。平均については、対称性（symmetry）を使うのが要点である。n が集合に属するならその「相方」$N-n$ も集合に属するので、数は中点を挟んでペアに分かれる。

解答

小問 1：100 万未満で、2 でも 5 でも割り切れない整数

「2 でも 5 でも割り切れない」とは、どちらでも割り切れないという意味である。整数が 2 または 5 で割り切れるのは、最後の桁が $0,2,4,5,6$ または 8 のとき、かつそのときに限る。よって、最後の桁が 1、3、7、9 のいずれかである整数を数えればよい。

整数 $0,1,\ldots,999\,999$ は、連続する 10 個の整数 $10k, 10k+1,\ldots,10k+9$ からなる 100 000 個のブロックに分かれ、各ブロックには求める整数がちょうど 4 個ずつ含まれる。したがって個数は

$$4\times 100\,000 = 400\,000.$$

である（包除原理（inclusion–exclusion）を使っても同じ結果 $10^6-\frac{1}{2}10^6-\frac{1}{5}10^6+\frac{1}{10}10^6=400\,000$ が得られる）。

平均を求めるために、このような n のそれぞれを 10^6-n と組にする。n の最後の桁が $1,3,7,9$ ならば、10^6-n の最後の桁はそれぞれ $9,7,3,1$ であり、また $n\neq 0$ だから

$0 < 10^6 - n < 10^6$ である。よって $n \mapsto 10^6 - n$ はこの集合をそれ自身に写し、しかもそれ自身が自分の逆写像（inverse）である。$n = 500\,000$ は偶数なので、この写像は不動点（fixed point）をもたない。したがって集合は和が 10^6 である $200\,000$ 組のペアに分かれる。総和は $200\,000 \times 10^6$ であり、平均は

$$\frac{200\,000 \times 10^6}{400\,000} = 500\,000.$$

である。

小問 2：4179 未満で、3 でも 7 でも割り切れない整数

4179 という数は注意深く選ばれている：

$$4179 = 3 \times 1393 = 3 \times 7 \times 199 = 21 \times 199.$$

n が 3 または 7 で割り切れるかどうかは、n を 21 で割った余りだけで決まる。余り $0, 1, \ldots, 20$ のうち、3 の倍数は $0, 3, \ldots, 18$（7 個）、7 の倍数は $0, 7, 14$（3 個）であり、0 は両方で数えられている。よって $21 - 7 - 3 + 1 = 12$ 個の余りがどちらでも割り切れない：

$$1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 8,\ 10,\ 11,\ 13,\ 16,\ 17,\ 19,\ 20.$$

整数 $0, 1, \ldots, 4178$ は、21 個からなる完全なブロックちょうど 199 個で構成されるので、個数は

$$12 \times 199 = 2388.$$

である。検算として包除原理を使うと $4179 - 1393 - 597 + 199 = 2388$ となる。

> **考えてみよう** ここでは数が十進法の桁とは何の関係もないのに、なぜ対称性の工夫がやはり使えるのだろうか。

鍵は 21 が 4179 を割り切ることである。このとき $4179 - n \equiv -n \pmod 3$ かつ $\pmod 7$ なので、$3 \mid 4179 - n$ であることと $3 \mid n$ であることは同値であり、7 についても同様である。また $n = 0$ は除かれる（あらゆる数で割り切れるから）ので、集合に属するどの n も $1 \le n \le 4178$ を満たし、このとき $1 \le 4179 - n \le 4178$ も成り立つ。よって $n \mapsto 4179 - n$ はこの集合をそれ自身に写す。4179 は奇数なので、この写像は不動点をもたない。したがって 2388 個の整数は和がそれぞれ 4179 である 1194 組のペアをなし、平均は

$$\frac{1194 \times 4179}{2388} = \frac{4179}{2} = 2089\tfrac{1}{2}.$$

である。

検算

コンピュータですべての整数を調べると、個数 400 000 と 2388、および平均 500 000 と 2089.5 が正確に確認できる。小さな場合を手計算で確かめることもできる。21 未満では、上に挙げた 12 個の余りの和は $126 = 12 \times \frac{21}{2}$ なので、その平均は $10.5 = \frac{21}{2}$ となり、ペアにする議論の予測とぴったり一致する。

よくある間違い

- 「2 でも 5 でも割り切れない」を「両方では割り切れない」、すなわち 10 で割り切れない、と読んでしまう。そう読むと 900 000 個になってしまう。
- 包除原理で、21 の倍数（または 10 の倍数）を足し戻すのを忘れる。これらは 2 回引かれているからである。
- 集合が対称であることを確かめずに、平均は範囲の中点に違いないと思い込む。ここでうまくいくのは、10 が 10^6 を割り切り、21 が 4179 を割り切るからにすぎない。

STEP のその先へ

$1, \ldots, m$ のうち m と互いに素（coprime）な整数の個数は、オイラー（Euler）のトーシェント関数（Euler's totient function）$\varphi(m)$ である。ここでは $\varphi(10) = 4$、$\varphi(21) = 12$ であり、求めた個数は $\varphi(10^6) = 400\,000$ と $199\,\varphi(21)$ である。ペア $n \leftrightarrow m - n$ を考えると、$m > 2$ のとき m と互いに素な整数の和は常に $\frac{1}{2} m\,\varphi(m)$ となることがわかる。これは m を法とする整数の算術への第一歩となる事実である。さらに学ぶには、Davenport の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）が格好の一冊である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。