解答例

STEP III 1998、第 9 問

力学 ・ 慣性モーメント

> **STEP III 1998、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q9

鍵となる考え方

中身の詰まった円錐は、頂点からの距離に比例して半径が大きくなる薄い円板を積み重ねたものである。薄い円板の慣性モーメント（moment of inertia）（その軸のまわり、および直径のまわり）がわかっていれば、各薄片の寄与を 1 つの積分で足し合わせることができる。2 本目の軸については、直交軸の定理（perpendicular axis theorem）（円板の軸まわりのモーメントを直径まわりのモーメントに変換するため）と平行軸の定理（parallel axis theorem）（その軸を頂点まで平行移動するため）が必要である。振動の方は実体振り子（compound pendulum）であり、その周期を求めるにはちょうど頂点まわりの慣性モーメントが必要となる。

解答

薄片への分割

頂点を原点に置き、円錐の軸を z 軸に沿ってとる。すると底面は平面 $z = h$ となる。ρ を（一定の）密度（density）とする。相似な三角形により、高さ z における断面は半径

$$r = \frac{az}{h},$$

の円板である。厚さ δz の薄片は質量 $\delta m = \rho\pi r^2\,\delta z = \rho\pi\dfrac{a^2z^2}{h^2}\,\delta z$ の薄い円板である。積分すると

$$m = \int_0^h \rho\pi\frac{a^2z^2}{h^2}\,\mathrm{d}z = \tfrac{1}{3}\rho\pi a^2 h, \qquad \text{よって} \qquad \rho\pi = \frac{3m}{a^2h}.$$

軸まわりの慣性モーメント

質量 M、半径 r の一様な円板の、その軸まわりの慣性モーメントは $\frac{1}{2}Mr^2$ である。（円板を半径 s、質量 $\frac{2Ms}{r^2}\,\delta s$ の円環に分割すると、各円環はその質量の s^2 倍を寄与し、$\int_0^r \frac{2M}{r^2}s^3\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}Mr^2$ となる。）

円錐のどの薄片も中心が軸上にあるので、各薄片の寄与はそのまま足し合わされる。

$$\begin{aligned} I_{\text{axis}} &= \int_0^h \tfrac{1}{2}r^2\,\rho\pi r^2\,\mathrm{d}z = \tfrac{1}{2}\rho\pi\frac{a^4}{h^4}\int_0^h z^4\,\mathrm{d}z = \tfrac{1}{10}\rho\pi a^4 h \\ &= \frac{1}{10}\cdot\frac{3m}{a^2h}\cdot a^4h = \frac{3}{10}ma^2, \end{aligned}$$

これが求める結果である。

頂点を通る軸まわりの慣性モーメント

2 つの定理を用いる。

- **直交軸の定理**。平面内にある薄板について、その平面に垂直な軸まわりの慣性モーメントは、平面内にあって同じ点でその軸と交わる、互いに垂直な任意の 2 軸のまわりの慣性モーメントの和に等しい。
- **平行軸の定理**。質量 M の物体の、重心（centre of mass）G を通る軸まわりの慣性モーメントが I_G であるとき、その軸から距離 d だけ離れた平行な軸まわりの慣性モーメントは $I_G + Md^2$ である。

薄い円板では、対称性により 2 本の直径は同等であるから、直交軸の定理より $2I_{\text{diam}} = \frac{1}{2}Mr^2$、すなわち $I_{\text{diam}} = \frac{1}{4}Mr^2$ である。

頂点を通り底面に平行な軸 ℓ をとる（たとえば x 軸に沿ってとる）。高さ z の薄片の重心は z 軸上にあって ℓ から距離 z にあり、ℓ に平行なその薄片自身の直径はこの重心を通る。平行軸の定理により、この薄片の寄与は $\left(\frac{1}{4}r^2 + z^2\right)\delta m$ である。したがって

$$\begin{aligned} I_{\text{apex}} &= \int_0^h \left(\frac{a^2z^2}{4h^2} + z^2\right)\rho\pi\frac{a^2z^2}{h^2}\,\mathrm{d}z = \rho\pi\frac{a^2}{h^2}\left(\frac{a^2}{4h^2} + 1\right)\frac{h^5}{5} \\ &= \frac{3m}{a^2h}\cdot\frac{a^2h^3}{5}\cdot\frac{a^2+4h^2}{4h^2} = \frac{3m}{20}\left(a^2+4h^2\right). \end{aligned}$$

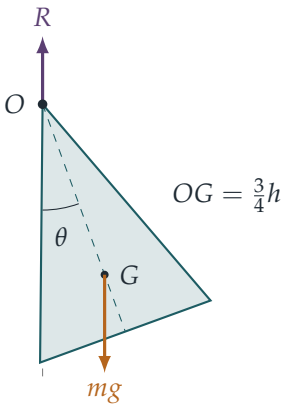
> **考えてみよう** 円錐全体に対して一度に平行軸の定理を適用し、重心から平行移動することはなぜできないのだろうか。

できなくはないが、G を通る平行な軸まわりの慣性モーメントはまだわかっておらず、それこそを計算する必要が生じる。薄片に分割すればこれを回避できる。各円板の自身の直径まわりのモーメントは既知であり、各円板の中心は軸上で ℓ から既知の距離

z にあるからである。（副産物として、$I_G = I_{\text{apex}} - m\left(\frac{3}{4}h\right)^2 = \frac{3m}{80}(4a^2 + h^2)$ が得られる。）

頂点のまわりの微小振動

円錐を、頂点を通り運動平面に垂直な、なめらかな水平軸のまわりに自由に回転できる剛体（rigid body）としてモデル化する。この軸は底面に平行であるから、そのまわりの慣性モーメントは I_{apex} である。円錐の軸と鉛直下向きとのなす角を θ とする。



軸における抗力は O のまわりのモーメントをもたないので、トルク（torque）を生じるのは O から距離 $\frac{3}{4}h$ にある G に働く重力だけである。その O のまわりのモーメントは $mg \cdot \frac{3}{4}h\sin\theta$ であり、θ を減少させる向きに働く。軸のまわりのモーメントを考えると

$$I_{\text{apex}}\,\ddot{\theta} = -\tfrac{3}{4}mgh\sin\theta.$$

微小振動では $\sin\theta \approx \theta$ であるから

$$\ddot{\theta} = -\omega^2\theta, \qquad \omega^2 = \frac{\frac{3}{4}mgh}{\frac{3m}{20}(a^2 + 4h^2)} = \frac{5gh}{4h^2 + a^2}.$$

これは単振動（simple harmonic motion）であり、その周期は

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{4h^2 + a^2}{5gh}},$$

となり、これが求める結果である。

検算

▶ 単位：$\frac{4h^2+a^2}{gh}$ の単位は $\mathrm{m}^2/(\mathrm{m\,s^{-2}}\cdot\mathrm{m}) = \mathrm{s}^2$ であり、周期の 2 乗としてふさわしい。

- 細い円錐（$a \to 0$）：質量はすべて軸に沿って分布し、$\int z^2 \,\mathrm{d}m = \frac{3}{5}mh^2$ となって、$I_{\text{apex}} \to \frac{3}{5}mh^2$ と一致する。周期は $2\pi\sqrt{4h/(5g)}$ となり、これは長さ $\frac{4}{5}h$ の単振り子（simple pendulum）の周期である。この長さは $\frac{3}{4}h$ より長く、質量が長さ方向に広がった物体として当然の結果である。
- 数値的に、$m = 1$、$a = 0.7$、$h = 2.3$ として、シンプソンの公式（Simpson's rule）による薄片の数値積分と、円錐内の点のモンテカルロ（Monte Carlo）標本の両方で $I_{\text{axis}} = 0.147$ および $I_{\text{apex}} \approx 3.2475$ が得られ、公式と一致した。また $g = 9.81$ として、小さな振幅から $I\ddot{\theta} = -\frac{3}{4}mgh\sin\theta$ を数値的に時間発展させると周期 2.7525 s が得られ、公式の予測どおりであった。

よくある間違い

- 後半で各薄片に $\frac{1}{2}r^2\,\delta m$ を用いること：底面に平行な軸のまわりでは、円板はその直径のまわりに回転するので、寄与は $\frac{1}{2}r^2\,\delta m$ ではなく $\frac{1}{4}r^2\,\delta m$ である。
- 重心からではなく頂点から平行軸の定理を適用すること：この定理は、2 本の軸の一方が重心を通る場合にのみ成り立つ。
- 円錐を長さ $\frac{3}{4}h$ の単振り子として扱うこと：周期を決めるのは G の位置だけではなく、慣性モーメントである。

STEP のその先へ

ある点を通る任意の軸のまわりの慣性モーメントは、慣性テンソル（inertia tensor）と呼ばれる 1 つの 3×3 対称行列に集約される。直交軸の定理と平行軸の定理は、回転と平行移動のもとでこの行列がどう振る舞うかの特別な場合である。その固有ベクトル（eigenvector）である主軸（principal axes）を考えると、回転する物体がある軸のまわりでは安定し、別の軸のまわりではふらつく理由が説明できる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体の回転と実体振り子をこの水準で展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。