解答例

STEP III 1998、第 8 問

純粋数学 • ベクトルと球面

STEP III 1998、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/98-s3-q8

鍵となる考え方

ここでのすべては同じ一手に帰着する。「点 $\mathbf{r}$ が球面（sphere）上にある」ことをスカラー方程式（scalar equation）$|\mathbf{r}-\mathbf{c}|^2 = a^2$ として書き、内積（dot product）を用いて展開し、必要なことを読み取るのである。(i) の直線に対しては λ の二次方程式（quadratic）が得られ、交点の個数はその判別式（discriminant）で決まる。(ii) では中心から平面までの距離が必要であり、(iii) では二つの球面の方程式を辺々引くと、「垂直」という条件が問うている内積がちょうど得られる。

解答

小問 (i)

点 $\mathbf{b}+\lambda\mathbf{m}$ が球面上にあるのは、$(\mathbf{b}+\lambda\mathbf{m})\cdot(\mathbf{b}+\lambda\mathbf{m}) = a^2$ となるときであり、またそのときに限る。これを展開し、$\mathbf{m}$ が単位ベクトル（unit vector）であることから $\mathbf{m}\cdot\mathbf{m} = 1$ を用いると、

$$\lambda^2 + 2(\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})\lambda + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - a^2 = 0.$$

各実数解（real root）λ が交点を一つずつ与え、異なる λ の値は異なる点を与える（$\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$ であるから）。したがって交点が二つあるのは、この二次方程式が異なる二つの実数解をもつとき、すなわち判別式が正のときであり、またそのときに限る。

$$4(\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})^2 - 4(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - a^2) > 0 \iff a^2 > \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})^2,$$

これが求める条件である。

交点がちょうど一つになるのは、判別式が 0 のときである。

$$a^2 = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})^2.$$

このとき重解（repeated root）は $\lambda = -\mathbf{b}\cdot\mathbf{m}$（$\lambda$ の係数の半分に負号をつけたもの）であるから、その点は

$$\mathbf{p} = \mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})\,\mathbf{m}, \qquad \text{であり} \qquad \mathbf{m}\cdot\mathbf{p} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{m} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})(\mathbf{m}\cdot\mathbf{m}) = 0,$$

となる。ここでも $\mathbf{m}\cdot\mathbf{m} = 1$ を用いた。よって接線（tangent line）は接点への半径（radius）に垂直であり、当然そうあるべき結果である。

小問 (ii)

$\mathbf{n}$ に垂直な平面は、定数 k を用いて $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = k$ という方程式で表され、$\mathbf{n}$ は単位ベクトルであるから、原点からの距離は $|k|$ である。$k \geq 0$ となるように $\mathbf{n}$ の向きを選ぶ（すなわち $\mathbf{n}$ が原点から平面の方を向くようにする）と、平面は

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = l.$$

考えてみよう 中心 $\mathbf{d}$ はこの平面からどれだけ離れているか。

$\mathbf{d}$ から法線（normal）に沿って進む。点 $\mathbf{d} + \mu\mathbf{n}$ が平面上にあるのは $\mathbf{d}\cdot\mathbf{n} + \mu = l$ のときであるから、$\mu = l - \mathbf{d}\cdot\mathbf{n}$ である。これは $\mathbf{d}$ から下ろした垂線の足（foot of the perpendicular）であるから、中心から平面までの距離は $|\mu| = |l - \mathbf{d}\cdot\mathbf{n}|$ である。

平面が球面に接する（touch）のは、この距離が半径に等しいときであり、またそのときに限る（距離がそれより小さければ平面は球面を円で切り、大きければ両者は交わらない）。したがって条件は

$$|\mathbf{d}\cdot\mathbf{n} - l| = a, \qquad \text{すなわち} \qquad (\mathbf{d}\cdot\mathbf{n} - l)^2 = a^2,$$

つまり $\mathbf{d}\cdot\mathbf{n} = l \pm a$ である。（逆に $\mathbf{n}$ が平面と反対の方を向いている場合は、平面の方程式は $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = -l$ となり、条件は $|\mathbf{d}\cdot\mathbf{n} + l| = a$ となる。）

小問 (iii)

一つ目の球面は中心 O、二つ目の球面は中心 D（位置ベクトル $\mathbf{d}$）をもち、半径はどちらも a である。点 $\mathbf{r}$ が両方の上にあるのは

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = a^2 \qquad \text{かつ} \qquad (\mathbf{r} - \mathbf{d})\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{d}) = a^2.$$

のときである。二つ目を展開して一つ目を引くと $-2\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{d} + \mathbf{d}\cdot\mathbf{d} = 0$ となるから、すべての交点は

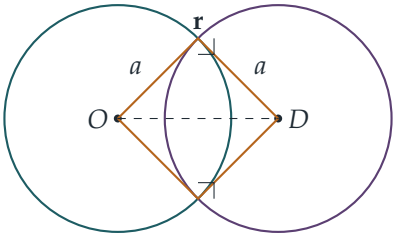
$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{d} = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{d}\cdot\mathbf{d}.$$

を満たす。点 $\mathbf{r}$ への二本の半径は、ベクトル $\mathbf{r}$（O から）と $\mathbf{r}-\mathbf{d}$（D から）である。これらが垂直になるのは

$$\mathbf{r}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{d}) = \mathbf{r}\cdot\mathbf{r} - \mathbf{r}\cdot\mathbf{d} = a^2 - \tfrac{1}{2}\,\mathbf{d}\cdot\mathbf{d}$$

が 0 になるときである。右辺はどの交点を選んだかによらないので、$\mathbf{d}\cdot\mathbf{d} = 2a^2$ ならばすべての交点で半径どうしは垂直であり、これが示すべきことであった。（この議論は逆にもたどれる。共有点のうちたった一つでも半径どうしが垂直ならば、$\mathbf{d}\cdot\mathbf{d} = 2a^2$ である。）

この場合、二つの球面は実際に交わる。$|\mathbf{d}| = \sqrt{2}\,a$ は 0 と $2a$ の間に真に含まれるので、両者は円で交わる。O と D を通る断面を見ると、直角がわかる。



平面上で、半径 a の二つの円が共有点において互いに垂直な半径をもつならば、OD は直角二等辺三角形（isosceles right-angled triangle）の斜辺となるので、$OD^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$ である。ピタゴラス（Pythagoras）の定理によっても同じ答えが得られる。

検算

- (i) で $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ とすると、直線は中心を通り、条件は $a^2 > 0$ となる。実際、そのような直線はつねに球面と二点で交わる。
- (ii) で球面の中心を原点とする（$\mathbf{d} = \mathbf{0}$）と、条件は $l = a$ となる。平面が球面に接するのは、中心からの距離が a のときである。
- 数値で確かめる。$a = 1$、$|\mathbf{d}| = 1.2$（$\sqrt{2}$ ではない）とすると、交点の一つは $(0.6, 0.8, 0)$ であり、$\mathbf{r}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{d}) = 1 - 0.72 = 0.28 \neq 0$ となって、$a^2 - \frac{1}{2}\mathbf{d}\cdot\mathbf{d}$ と一致する。三つの小問すべてについて無作為な値で試したところ、10^{-13} 以内の誤差で一致した。

よくある間違い

- $\mathbf{m}\cdot\mathbf{m} = 1$ であることを忘れ、λ^2 に不要な係数をつけたまま計算してしまう。
- (ii) の接する条件を $\mathbf{d}\cdot\mathbf{n} - l = a$ だけで書いてしまう。中心は平面のどちら側にもありうる。

STEP のその先へ

量 $\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})^2$ は $|\mathbf{b}\times\mathbf{m}|^2$、すなわち原点から直線までの距離の二乗であり、$\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})\mathbf{m}$ は $\mathbf{b}$ から $\mathbf{m}$ 方向の成分を取り除いた正射影（orthogonal projection）である。これは線形代数（linear algebra）の核心にある考え方である。直角に交わる球面どうしは直交する（orthogonal）といい、反転幾何学（inversive geometry）や双曲幾何学（hyperbolic geometry）のモデルにおいて中心的な役割を果たす。射影については Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）が扱っており、直交する円が活躍する様子は Needham の *Visual Complex Analysis*（ヴィジュアル複素解析）で見ることができる。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。