解答例

STEP III 1998、第 7 問

純粋数学 ・ 曲線の概形と積分

> **STEP III 1998、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q7

鍵となる考え方

最初の関数は思いつきの準備運動ではない。$\mathrm{b}(x)$ を微分して導関数（derivative）を 0 とおくと、現れる方程式はちょうど $\mathrm{f}(x/T)=0$ になる。したがって、f について分かること（正の根（root）はただ一つで、それは 2 と 3 の間にある）から、b の増減が変わる点の位置が分かる。B の T への依存性は、自然な置換（substitution）$x=Tu$ から得られる。この置換によって被積分関数（integrand）から T が取り除かれるのである。

解答

f の概形と m の決定

$\mathrm{f}(0)=1\cdot(-3)+3=0$ であり、

$$\mathrm{f}'(s)=\mathrm{e}^s(s-3)+\mathrm{e}^s=\mathrm{e}^s(s-2).$$

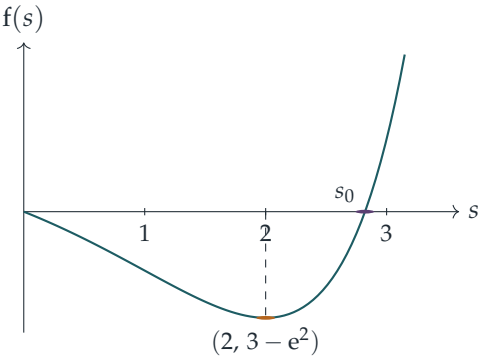
$\mathrm{e}^s>0$ であるから、f は $[0,2]$ で減少し、$[2,\infty)$ で増加する。最小値は $\mathrm{f}(2)=3-\mathrm{e}^2\approx 3-7.29=-4.29$ である。$s\to\infty$ のとき $\mathrm{e}^s(s-3)\to\infty$ であるから、$\mathrm{f}(s)\to\infty$ となる。

$\mathrm{f}(0)=0$ であり、f は $[0,2]$ で狭義単調減少であるから、$0<s\le 2$ に対して $\mathrm{f}(s)<0$ である。$[2,\infty)$ では負の値から $+\infty$ まで狭義単調増加するので、そこでちょうど一度だけ 0 をまたぐ。その点をある $s_0>2$ とする。よって、s_0 は f の**唯一の**正の根である。

$\mathrm{e}\approx 2.7$ とすると、

$$\mathrm{f}(1)=3-2\mathrm{e}\approx -2.4,\qquad \mathrm{f}(2)\approx -4.29,\qquad \mathrm{f}(3)=0+3=3.$$

したがって、$\mathrm{f}(m)>0$ となる最小の正の整数は $m=3$ であり、$2<s_0<3$ である（実際には $s_0\approx 2.82$）。



b のただ一つの停留点

$u = x/T$ とおく。商の微分法（quotient rule）により、

$$\mathrm{b}'(x) = \frac{3x^2(\mathrm{e}^{x/T}-1) - x^3\cdot\frac{1}{T}\mathrm{e}^{x/T}}{(\mathrm{e}^{x/T}-1)^2} = \frac{x^2\left(3\mathrm{e}^{u}-3-u\,\mathrm{e}^{u}\right)}{(\mathrm{e}^{u}-1)^2} = -\frac{x^2\,\mathrm{f}(u)}{(\mathrm{e}^{u}-1)^2}.$$

$x > 0$ のとき $x^2 > 0$ かつ $(\mathrm{e}^u - 1)^2 > 0$ であるから、$\mathrm{b}'(x) = 0$ となるのは $\mathrm{f}(x/T) = 0$ のときであり、かつそのときに限る。前半の結果から、これが起こるのは $x/T = s_0$ のときだけである。よって b は $0 < x < \infty$ にただ一つの停留点（turning point）をもち、その位置は

$$x = s_0 T \approx 2.82\,T.$$

さらに、$0 < u < s_0$ では $\mathrm{f}(u) < 0$、$u > s_0$ では $\mathrm{f}(u) > 0$ であるから、この点の手前では $\mathrm{b}' > 0$、この点の先では $\mathrm{b}' < 0$ である。すなわち、この点は極大点（maximum）である。

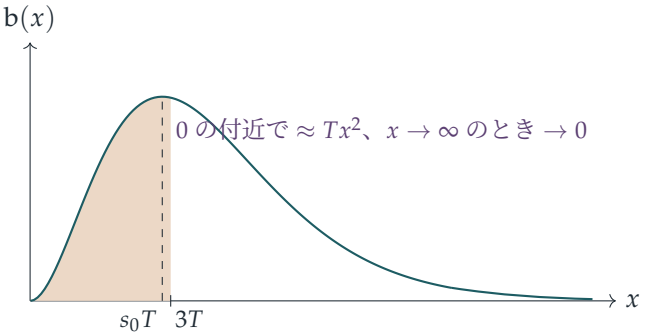
> **考えてみよう** 分子と分母がともに 0 になる $x = 0$ の付近で、b はどのような形をしているか。

x が小さいとき $\mathrm{e}^{x/T} - 1 \approx x/T$ であるから、

$$\mathrm{b}(x) \approx \frac{x^3}{x/T} = Tx^2,$$

となり、グラフは傾き 0 で放物線のように原点から立ち上がる（したがって $\mathrm{b}(0) = 0$ とするのが自然である）。x が大きいときは指数関数がどんな累乗よりも優勢になるので、$\mathrm{b}(x) \approx x^3\mathrm{e}^{-x/T} \to 0$ となり、x 軸が漸近線（asymptote）である。すべての $x > 0$ に対して $\mathrm{b}(x) > 0$ であるから、グラフは原点から上昇して $x = s_0 T$ でただ一つの山をつくり、その後は軸に向かって減衰していく。

前半の結果を用いると、山の高さは $\mathrm{b}(s_0 T) = T^3 s_0^3/(\mathrm{e}^{s_0} - 1) \approx 1.42\,T^3$ であり、$\mathrm{b}(3T) = 27T^3/(\mathrm{e}^3 - 1)$ はそれよりわずかに小さいだけである。



（図は $T=1$ として描いてある。網かけ部分は最後の小問で用いる領域である。）

B の形

$x=Tu$ と置換すると $\mathrm{d}x=T\,\mathrm{d}u$ であり、$T>0$ であるから積分区間の端 $0,\infty$ は変わらない。よって

$$B=\int_0^\infty \frac{T^3u^3}{\mathrm{e}^u-1}\,T\,\mathrm{d}u=T^4\int_0^\infty \frac{u^3}{\mathrm{e}^u-1}\,\mathrm{d}u.$$

最後の積分は T を含まないので、定数 K である（仮定してよいとおり有限である）。したがって $B=KT^4$ であり、$n=4$ である。

K の見積もり

同じ置換と $m=3$ を用いると、

$$KT^4=B\approx 2\int_0^{3T}\mathrm{b}(x)\,\mathrm{d}x=2T^4\int_0^3\frac{u^3}{\mathrm{e}^u-1}\,\mathrm{d}u,\qquad \text{よって}\qquad K\approx 2\int_0^3\frac{u^3}{\mathrm{e}^u-1}\,\mathrm{d}u.$$

これは図（$T=1$）の網かけ部分の面積の 2 倍である。$\mathrm{e}\approx 2.7$ を用いてグラフから高さを読み取ると、

$$\mathrm{b}(0)=0,\quad \mathrm{b}(1)\approx\frac{1}{1.7}\approx 0.59,\quad \mathrm{b}(2)\approx\frac{8}{6.29}\approx 1.27,\quad \mathrm{b}(3)\approx\frac{27}{18.7}\approx 1.45.$$

幅 1 の区間に分けて台形公式（trapezium rule）を用いると、

$$\int_0^3\approx\tfrac{1}{2}(0)+0.59+1.27+\tfrac{1}{2}(1.45)\approx 2.58,$$

したがって

$$K\approx 5.$$

さらに粗い見積もりとして、網かけ部分を底辺 3、高さ約 1.45 の三角形とみなすと、面積は約 2.2 となり、$K\approx 4.3$ を得る。いずれにせよ、K はおよそ 4 から 5 である（三角形による見積もりは確実に小さすぎる。曲線は原点と $(3,\mathrm{b}(3))$ を結ぶ線分より上にあるからである）。

検算

- 数値的な二分法（bisection）によれば f の根は $s_0 \approx 2.8214$ であり、$T = 1.7$ として b′ を数値的に調べると、符号の変化はちょうど一度だけ、$x \approx 4.797 \approx 1.7 s_0$ で起こる。
- シンプソンの公式（Simpson's rule）により、$T = 0.5$、1、2.3 のいずれについても $B/T^4 \approx 6.4939$ となる。毎回同じ値であることから、$n = 4$ が確かめられる。これは既知の厳密値 $K = \pi^4/15 \approx 6.494$ と一致する。
- 積分 $\int_0^3 u^3/(\mathrm{e}^u - 1)\,\mathrm{d}u \approx 2.552$ であるから、問題で許されている近似を用いると $K \approx 5.10$ となる。我々の見積もり 5 はおおむね正しい。6.49 との差は問題の近似 $B \approx 2\int_0^{3T}$ による誤差であり、我々の計算の誤りではない。

よくある間違い

- $\mathrm{f}(0) = 0$ であることを忘れる：$s = 0$ は f の根であるが、これは $x = 0$ に対応し、$0 < x < \infty$ の範囲外であるから、停留点はやはり一つだけである。
- B で変数変換をする際に、$\mathrm{d}x = T\,\mathrm{d}u$ から生じる因子 T を忘れ、$n = 3$ としてしまう。

STEP のその先へ

関数 b は黒体放射（black-body radiation）に関するプランク（Planck）の法則であり、x が振動数、T が温度の役割を果たしている。山の位置 $x = s_0 T$ はウィーン（Wien）の変位則であり、$B \propto T^4$ はシュテファン（Stefan）＝ボルツマン（Boltzmann）の法則である。厳密値 $K = \pi^4/15$ は $1/(\mathrm{e}^u - 1) = \sum_{k\geq 1} \mathrm{e}^{-ku}$ と展開することで得られ、$K = 6\sum_{k\geq 1} 1/k^4 = 6\zeta(4)$ となる。この和と積分の交換を正当化することは、大学 1 年次の解析学の典型的な問題である。Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を参照のこと。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。