解答例

STEP III 1998、第 6 問

純粋数学 ・ 多面体の体積

> **STEP III 1998、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q6

鍵となる考え方

立方体を座標軸上に置き、その頂点が、各座標がすべて 0 または a である点になるようにする。すると距離は三次元のピタゴラス（Pythagoras）の定理から求まり、扱いにくい立体の体積は、立方体から単純な部分を切り取ることで測ることができる。正四面体（regular tetrahedron）は立方体から四つの角を切り落とした残りであり、正八面体（regular octahedron）は二つの正四角錐を底面同士で貼り合わせたものである。

解答

小問 (i)

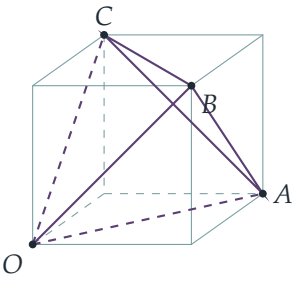
立方体 $[0,a]^3$ を考える。その頂点は、各座標が 0 または a である 8 個の点 (x,y,z) であり、二つの頂点が隣接する（辺で結ばれる）のは、ちょうど一つの座標だけが異なるとき、かつそのときに限る。

どの四つの頂点を選べるか。座標のうち a に等しいものの個数に応じて、頂点を**偶**または**奇**とよぶことにする。辺に沿って移動すると座標が一つ変わるので、偶と奇は必ず入れ替わる。選んだ四つの頂点に偶の頂点 P と奇の頂点 Q が含まれていたとする。これらは隣接しないので三つの座標すべてが異なり、Q は P の対頂点である。他のすべての頂点は P または Q に隣接する（奇の三つは P に、偶の三つは Q に）ので、三つ目の頂点を加えることはできない。したがって、四つの頂点はすべて偶、すなわち

$$O=(0,0,0),\quad A=(a,a,0),\quad B=(a,0,a),\quad C=(0,a,a),$$

であるか、すべて奇（この集合を平面 $x=\frac{1}{2}a$ に関して鏡映したもので、合同な立体を与える）である。

正則性。O, A, B, C のどの二つも、ちょうど二つの座標がそれぞれ a ずつ異なるので、六つの距離はすべて $\sqrt{a^2+a^2} = \sqrt{2}\,a$ である。よって四つの面はいずれも一辺 $\sqrt{2}\,a$ の正三角形であり、$OABC$ は正四面体である。その各辺は立方体のある面の対角線である。



体積。立方体から四面体を取り除くと、四つの角の部分が残り、それぞれ奇の頂点に一つずつある。たとえば $(a,0,0)$ における角は、その頂点と三つの隣接頂点 O、A、B からなる四面体である。$(a,0,0)$ から出る三本の辺は互いに垂直で長さ a なので、これは面積 $\frac{1}{2}a^2$ の直角三角形を底面とし、高さ a の錐であり、体積は $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}a^2\cdot a = \frac{1}{6}a^3$ である。よって

$$V_{\text{tet}} = a^3 - 4\cdot\tfrac{1}{6}a^3 = \tfrac{1}{3}a^3.$$

辺の長さを 1 にするには $\sqrt{2}\,a = 1$、すなわち $a = 1/\sqrt{2}$、$a^3 = 1/(2\sqrt{2})$ とすればよい。したがって一辺の長さ 1 の正四面体の体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{12}.$$

考えてみよう 四つの角の部分と四面体が、重なりなくちょうど立方体を埋め尽くすのはなぜか。

四面体の各面、たとえば OAB は、立方体の頂点をちょうど一つ、ここでは $(a,0,0)$ を切り落とす。実際、O、A、B を通る平面 $x-y-z=0$ に関して、$(a,0,0)$ は厳密に一方の側にあり、残りの 7 個の頂点は反対側か平面上にある。よって立方体は、各面の外側に一つずつある四つの角の部分と、中央の四面体とに分かれる。

小問 (ii)

一辺の長さ 1 の正八面体は、その 6 個の頂点を

$$(\pm h,0,0),\quad (0,\pm h,0),\quad (0,0,\pm h),\qquad h = \tfrac{1}{\sqrt{2}},$$

に置くことができる。ここで各頂点は、対頂点でない四つの頂点と結ばれる。そのような二頂点、たとえば $(h,0,0)$ と $(0,h,0)$ の距離は $\sqrt{2}\,h = 1$ である。よって 12 本の辺

はすべて長さ 1 であり、各八分空間に一つずつある 8 個の面は正三角形である。平面 $z = 0$ 上の四つの頂点は一辺 1 の正方形をなす。八面体は、この正方形を底面とし頂点を $(0, 0, \pm h)$ とする二つの正四角錐からなり、それぞれの高さは h である。よって

$$V_{\text{oct}} = 2 \cdot \tfrac{1}{3} \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

より一般に、長さを e 倍すると体積は e^3 倍になるので、一辺 e の正八面体の体積は $\frac{\sqrt{2}}{3}e^3$ である。

小問 (iii)

ここでは一辺 a の立方体を原点を中心に $[-\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a]^3$ として置くほうがすっきりする。その面の中心は

$$(\pm\tfrac{1}{2}a, 0, 0), \quad (0, \pm\tfrac{1}{2}a, 0), \quad (0, 0, \pm\tfrac{1}{2}a).$$

これはまさに小問 (ii) の配置で $h = \frac{1}{2}a$ としたものである。向かい合う面の中心どうしの距離は a である。隣り合う面の中心どうしの距離は $\sqrt{(\frac{1}{2}a)^2 + (\frac{1}{2}a)^2} = a/\sqrt{2}$ である。これら 6 点を頂点とする凸立体は、各八分空間に一つずつ、計 8 個の面をもつ。たとえば八分空間 $x, y, z \geq 0$ にある面は、頂点 $(\frac{1}{2}a, 0, 0)$、$(0, \frac{1}{2}a, 0)$、$(0, 0, \frac{1}{2}a)$ をもつ三角形である。各面は一辺 $a/\sqrt{2}$ の正三角形なので、面の中心は一辺 $e = a/\sqrt{2}$ の正八面体をなす。

小問 (ii) より、その体積は

$$\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{a^3}{2\sqrt{2}} = \frac{a^3}{6}.$$

同じ立方体の頂点のうち四つを頂点とする小問 (i) の四面体の体積は $\frac{1}{3}a^3$ である。$\frac{1}{6}a^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}a^3$ であるから、八面体の体積は四面体の体積の半分であり、これが示すべきことであった。

検算

- 底面積 $\frac{\sqrt{3}}{4}$、高さ $\sqrt{2/3}$ として「底面積 × 高さ」の公式を用いると、一辺 1 の四面体の体積は $\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{12} \approx 0.11785$ となり、小問 (i) と一致する。
- 辺の長さが等しいとき $V_{\text{oct}} = 4V_{\text{tet}}$ である。実際 $\frac{\sqrt{2}}{3} = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{12}$ である。これは、一辺 2 の四面体を、一辺 1 の四面体四つ（角の部分）と一辺 1 の八面体一つ（中央）に分割する古典的な分割（dissection）と一致する。一辺 1 の四面体を単位として測ると $8 = 4 + 4$ である。

- 数値的にも、隣接しない立方体の頂点四つの選び方すべてについて行列式（determinant）で計算すると、単位立方体に対して体積 $\frac{1}{3}$ が得られ、領域 $|x|+|y|+|z| \leq 1/\sqrt{2}$ のモンテカルロ法（Monte Carlo）による推定値は 0.4715 となり、$\sqrt{2}/3 \approx 0.47140$ とよく合う。

よくある間違い

- 小問 (i) で立方体の一辺を 1 としてしまうこと。このとき四面体の辺は 1 ではなく $\sqrt{2}$ となり、体積を $(1/\sqrt{2})^3$ 倍に縮尺し直す必要がある。
- 引く角を間違えること。角の部分は（使わない頂点ごとに一つずつ）四つあり、それぞれの体積は $\frac{1}{6}a^3$ である。八つではない。
- 小問 (iii) で立方体の一辺を八面体の辺として用いること。隣り合う面の中心どうしの距離は $a/\sqrt{2}$ である。

STEP のその先へ

立方体の中の二つの四面体と、面の中心からなる八面体は、プラトンの立体（Platonic solids）とその対称群（symmetry group）の物語の始まりである。内接する一つの四面体を保つ立方体の回転全体は位数 12 の群をなし、これは立方体の回転全体 24 個の半分である。立方体と八面体は**双対**（dual）であり（一方の面の中心が他方の頂点を与える）、このような立体の体積は、線形写像が体積を何倍に拡大するかを測る行列式によってきれいに求まる。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は行列式を体積として扱っており、Armstrong の *Groups and Symmetry*（群と対称性）はこれらの立体の対称群を論じている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。