解答例

# STEP III 1998、第 5 問

純粋数学 ・ 行列の指数関数

**STEP III 1998、問 5**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/98-s3-q5

## 鍵となる考え方

行列の無限級数（infinite series of matrices）は一見恐ろしく見えるが、ここに現れる二つの行列はいずれも、その冪（power）がきわめて単純な規則で繰り返される。すなわち、$\mathbf{M}$ の冪は $i$ の冪と同じように循環し、$\mathbf{N}$ の冪は 2 乗以降すべて消える。すべての冪がわかれば、級数はおなじみのスカラーの級数に分かれる（あるいは途中で完全に止まる）ので、どのような変換であるかを読み取ることができる。最後の小問は行列の直接計算であり、その幾何学的な意味は、それぞれの変換がどの直線を動かさないかを問うことで明らかになる。

## 解答

### 行列 $\mathbf{M}$

積を計算すると

$$\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbf{I},$$

となり、示すべき式が得られる。したがって、すべての整数 $k \geq 0$ に対して

$$\mathbf{M}^{2k} = (\mathbf{M}^2)^k = (-1)^k\mathbf{I}, \qquad \mathbf{M}^{2k+1} = (-1)^k\mathbf{M}.$$

級数を $\theta\mathbf{M}$ の偶数乗と奇数乗に分けると

$$\begin{aligned}\exp(\theta\mathbf{M}) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta^{2k}}{(2k)!}\mathbf{M}^{2k}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}\mathbf{M}^{2k+1}\\ &= \Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\theta^{2k}}{(2k)!}\Big)\mathbf{I}+\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}\Big)\mathbf{M}\\ &= \cos\theta\,\mathbf{I}+\sin\theta\,\mathbf{M}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

（このように分けてよいのは、行列の級数の各成分が実数の級数であり、その項の大きさが $|\theta|^r/r!$ で抑えられるため、絶対収束（absolute convergence）し、項を並べ替えてもよいからである。）

**考えてみよう** $\cos\theta\,\mathbf{I}+\sin\theta\,\mathbf{M}$ という形を以前どこで見ただろうか。

$\mathbf{M}^2=-\mathbf{I}$ であるから、行列 $\mathbf{M}$ はちょうど $i$ と同じようにふるまい、この計算は $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ の行列版である。幾何学的には、$\exp(\theta\mathbf{M})$ は $(1,0)$ を $(\cos\theta,\sin\theta)$ に、$(0,1)$ を $(-\sin\theta,\cos\theta)$ に移す。つまりこれは**原点のまわりの角 $\theta$ の反時計回りの回転（rotation）**である。（実際、$i$ を掛けることと同じく、$\mathbf{M}$ 自身は角 $\frac{\pi}{2}$ の回転である。）

### 行列 N

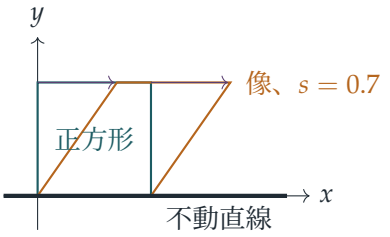
ここでは

$$\mathbf{N}^2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},$$

であるから、すべての $r\geq 2$ に対して $\mathbf{N}^r=\mathbf{0}$ となり、級数は2項で止まる：

$$\exp(s\mathbf{N})=\mathbf{I}+s\mathbf{N}=\begin{pmatrix}1&s\\0&1\end{pmatrix}.$$

これは $(x,y)$ を $(x+sy,\,y)$ に移す。各点は $x$ 軸に平行に、その高さ $y$ に比例する距離だけ動き、$x$ 軸上の点はまったく動かない。したがって $\exp(s\mathbf{N})$ は $x$ **軸に平行なせん断（shear）**であり、$x$ 軸をその不動点の直線とし、単位正方形を同じ面積の平行四辺形に移す（行列式は1である）。



### いつ可換になるか

$c = \cos\theta$、$\sigma = \sin\theta$ とおく。このとき

$$\exp(s\mathbf{N})\exp(\theta\mathbf{M}) = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -\sigma \\ \sigma & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+s\sigma & -\sigma+sc \\ \sigma & c \end{pmatrix},$$

$$\exp(\theta\mathbf{M})\exp(s\mathbf{N}) = \begin{pmatrix} c & -\sigma \\ \sigma & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & sc-\sigma \\ \sigma & s\sigma+c \end{pmatrix}.$$

差をとると

$$\exp(s\mathbf{N})\exp(\theta\mathbf{M}) - \exp(\theta\mathbf{M})\exp(s\mathbf{N}) = s\sin\theta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

これがすべての $s$ に対して零行列となるのは、$\sin\theta = 0$ のとき、かつそのときに限る（$\sin\theta \neq 0$ ならば $s = 1$ をとればよい）。よって、二つの行列がすべての $s$ に対して可換（commute）となるのは、ちょうど

$$\theta = n\pi, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

のときである。これらの値に対しては $\exp(\theta\mathbf{M}) = (-1)^n\mathbf{I}$ であり、これは単位行列か $-\mathbf{I}$ のいずれかである。

> **考えてみよう** このせん断と可換な回転が、半回転か何もしない回転でなければならないのはなぜだろうか。

回転を $R$、せん断を $S$（ただし $s \neq 0$）とし、$SR = RS$ と仮定する。$x$ 軸上の任意の点 $P$ をとると、$S(P) = P$ である。このとき

$$S(R(P)) = R(S(P)) = R(P),$$

となるので、$R(P)$ もまたせん断の不動点である。しかし、せん断が動かさない点は $x$ 軸上の点だけである。したがって回転は $x$ 軸をそれ自身に移さなければならず、そのような原点のまわりの回転は、角 0 の回転（恒等変換）か角 $\pi$ の回転（半回転 $(x,y) \mapsto (-x,-y)$）に限られる。逆に、これら二つは $\pm\mathbf{I}$ であるから、**あらゆる**線形写像と可換である。平面を半回転させることとせん断することは、どちらの順で行っても同じ結果になる。それ以外の回転はせん断の不動直線を傾けてしまうので、回転の前にせん断するか後にせん断するかで結果が異なる。

## 検算

- 級数から要請されるとおり、$\theta = 0$ のとき回転行列は $\mathbf{I}$ であり、$s = 0$ のときせん断は $\mathbf{I}$ である。

- 行列式はどちらも 1（$\cos^2\theta + \sin^2\theta$ と $1\cdot 1$）であり、面積を保つ回転とせん断としてあるべき値になっている。
- 数値的には、$\theta = 1$ として級数を 80 項まで足すと、各成分は $\cos 1 \approx 0.5403$ と $\sin 1 \approx 0.8415$ に一致する。$\theta = 1$、$s = 1$ のとき交換子（commutator）の対角成分は $\pm\sin 1 \approx \pm 0.8415$ であり、$s\sin\theta\,\mathrm{diag}(1,-1)$ に一致する。

## よくある間違い

- 行列に対して $\exp(\mathbf{A})\exp(\mathbf{B}) = \exp(\mathbf{A}+\mathbf{B})$ が成り立つと思い込むこと。この法則には $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ が必要であり、それこそが $\sin\theta = 0$ でない限りここで成り立たない点である。
- $\pi$ のすべての整数倍ではなく、$\theta = 0$（あるいは $\theta = 0, \pi$）だけを答えること。
- $\exp(s\mathbf{N})$ を伸縮や拡大と呼ぶこと。これは面積を保ち、$x$ 軸を各点ごとに固定する。それがせん断であることの決め手である。

## STEP のその先へ

行列指数関数（matrix exponential）は**リー代数**（Lie algebra）と**リー群**（Lie group）を結ぶ橋である。$\mathbf{M}$ は回転の群を、$\mathbf{N}$ はせん断の群を生成し、$\exp(t\mathbf{A})$ は線形微分方程式 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ を解く。可換でない行列に対して $\exp(\mathbf{A})\exp(\mathbf{B}) = \exp(\mathbf{A}+\mathbf{B})$ が成り立たない度合いは交換子 $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$ によって測られる。これは最後の小問で出会った考え方である。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）では、行列指数関数とその微分方程式への応用が扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。