解答例

STEP III 1998、第 4 問

純粋数学 ・ 正葉曲線

> **STEP III 1998、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q4

鍵となる考え方

極方程式（polar equation）で表された曲線は、方程式が簡単なときには直交座標（Cartesian coordinates）の式に直すと最も理解しやすく、そうでないときには r の符号を追跡すると理解しやすい。この問題全体の要は、$r<0$ である点は反対方向 $\theta+\pi$ に距離 $|r|$ のところにプロットするという約束である。$r=\cos k\theta$ の場合、この約束によって、負のループが新しい場所に描かれる（新たな花びらとなる）のか、すでに描かれた花びらに重なるのかが決まる。

解答

円 $r=\cos\theta$

両辺に r を掛け、$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, r^2=x^2+y^2$ を用いると

$$\begin{aligned} r^2=r\cos\theta \quad &\Longrightarrow \quad x^2+y^2=x \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\tfrac{1}{4}. \end{aligned}$$

となる。したがって、この曲線上のすべての点は、中心 $(\frac{1}{2},0)$、半径 $\frac{1}{2}$ の円上にある。

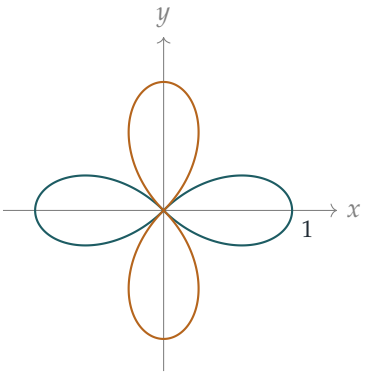
逆に、この円上の原点以外の任意の点 (x,y) をとる。$x=x^2+y^2>0$ であるから、その偏角（polar angle）は $-\frac{1}{2}\pi<\theta<\frac{1}{2}\pi$ を満たし、$r^2=x=r\cos\theta$ を $r>0$ で割ると $r=\cos\theta$ を得る。原点そのものは $\theta=\pm\frac{1}{2}\pi$ で到達される。よって、この曲線はちょうどこの円であり、θ が $-\frac{1}{2}\pi$ から $\frac{1}{2}\pi$ まで動くときに 1 回描かれる。この範囲では常に $r=\cos\theta\geq 0$ であるから、符号の約束は必要ない。

曲線 $r = \cos 2\theta$

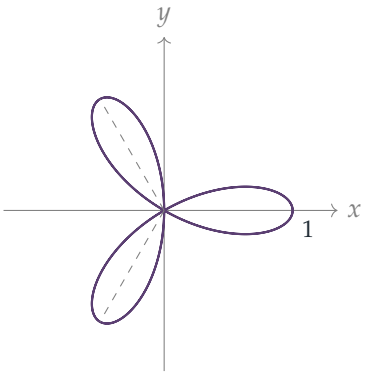
今度は r の符号が変わる。$r < 0$ である (r, θ) は、方向 $\theta + \pi$ に距離 $|r|$ のところにプロットする。

- $-\frac{1}{4}\pi < \theta < \frac{1}{4}\pi$ では $r > 0$ であり、r は 0 から $\theta = 0$ で 1 まで増加し、再び 0 に戻る。これは x 軸の正の向きに伸びる花びらである。
- $\frac{1}{4}\pi < \theta < \frac{3}{4}\pi$ では $r < 0$ であるから、これらの点は方向 $\frac{5}{4}\pi$ から $\frac{7}{4}\pi$ に描かれる。これは y 軸の負の向きに伸びる花びらである。
- 同様に、$\frac{3}{4}\pi < \theta < \frac{5}{4}\pi (r > 0)$からは x 軸の負の向きに伸びる花びらが、$\frac{5}{4}\pi < \theta < \frac{7}{4}\pi$（$r < 0$）からは y 軸の正の向きに伸びる花びらが得られる。

結果は四葉の正葉曲線（rose）であり、各花びらの長さは 1、両軸に関して対称で、花びら同士は原点でのみ接する。図では、ティール色の花びらは $r > 0$ から、琥珀色の花びらは $r < 0$ から得られたものである。



$r = \cos 2\theta$



$r = \cos 3\theta$

曲線 $r = \cos 2n\theta$

$\cos(-2n\theta) = \cos 2n\theta$ であるから、n と $-n$ は同じ曲線を与える。そこで $n \geq 1$ とする（$n = 0$ の場合は後で扱う）。

考えてみよう $r < 0$ のとき、ループはすでに描かれたものに重なるのか、それとも新しい場所に描かれるのか。

$r > 0$ となるのは、$k = 0, 1, \ldots, 2n - 1$ に対して $\theta = k\pi/n = 2k \cdot \frac{\pi}{2n}$ を中心とする長さ $\pi/(2n)$ の区間である。それぞれの区間から、方向 $2k \cdot \frac{\pi}{2n}$、すなわち $\frac{\pi}{2n}$ の**偶数**倍の方向を向く花びらが得られる。

$r < 0$ となるのは $\theta = (2k + 1)\frac{\pi}{2n}$ を中心とする区間であり、これらの点は方向 $\theta + \pi$ に

プロットされるから、花びらは

$$(2k+1)\frac{\pi}{2n}+\pi=(2k+1+2n)\frac{\pi}{2n},$$

すなわち $\frac{\pi}{2n}$ の**奇数**倍の方向を向く。したがって、負のループは正の花びらの間の隙間という新しい場所に描かれる。

よって $r=\cos 2n\theta$ は、$4n$ 枚の合同な花びらをもつ正葉曲線であり、各花びらの長さは 1、$m=0,1,\ldots,4n-1$ に対する方向 $m\pi/(2n)$ を向き、各花びらは角 $\pi/(2n)$ を占め、隣り合う花びらは原点でのみ出会う。（$n=1$ のときは上の四葉の正葉曲線である。）花びらの角の合計は $4n\cdot\frac{\pi}{2n}=2\pi$ であるから、花びらは重なりなく一周全体を埋め尽くす。

退化した場合 $n=0$ では、曲線は $r=1$、すなわち単位円である。

面積は n によらない

花びらは重ならないので、囲まれた領域の各部分は θ が 0 から 2π まで動く間にちょうど 1 回ずつ掃かれる。面積の公式 $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$（$r^2$ のみを含むので r の符号は関係ない）により、$n\geq 1$ に対して

$$\begin{aligned}A&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2 2n\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(1+\cos 4n\theta)\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{4}\left[\theta+\frac{\sin 4n\theta}{4n}\right]_0^{2\pi}=\frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

を得る。ここで $\sin 8n\pi=0$ を用いた。これは求められている通り n によらない。花びらを増やすと、ちょうどそれを打ち消すように各花びらが細くなるのである。（除外した場合 $n=0$ の単位円の面積は π である。公式中の項 $\sin 4n\theta/(4n)$ こそが、$n\neq 0$ を用いている箇所である。）

曲線 $r=\cos 3\theta$

考えてみよう この曲線の花びらが 6 枚ではなく 3 枚なのはなぜか。

今度は $r>0$ となるのは $\theta=0,\frac{2}{3}\pi,\frac{4}{3}\pi$ を中心とする区間であり、それらの方向を向く花びらが得られる。負のループは $\theta=\frac{1}{3}\pi,\pi,\frac{5}{3}\pi$ を中心とし、方向 $\frac{4}{3}\pi,2\pi,\frac{8}{3}\pi\equiv\frac{2}{3}\pi$ にプロットされる。これはちょうど正の花びらの方向である。実際、θ を $\theta+\pi$ に置き換えると、反対方向に

$$r=\cos(3\theta+3\pi)=-\cos 3\theta$$

となり、これは同じ点である。したがって $r=\cos 3\theta$ は三葉の正葉曲線であり、長さ 1 の花びらが $\theta=0,\frac{2}{3}\pi,\frac{4}{3}\pi$ の方向に伸び、それぞれが角 $\frac{1}{3}\pi$ を占める。そして θ が 0 か

ら 2π まで動く間に曲線全体が 2 回描かれる（$0 \le \theta \le \pi$ で 1 回）。これが上の右側の図である。

同じ議論により、任意の奇数 k に対して $r = \cos k\theta$ は 2 回描かれる k 葉の正葉曲線であり、偶数 k に対しては 1 回描かれる $2k$ 葉の正葉曲線であることがわかる。

検算

- $r = \cos\theta$ に $\theta = 0$ を代入すると、点 $(1, 0)$ は $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ 上にあり、原点（$\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$ のとき）もこの上にある。
- 円 $r = \cos\theta$ の面積は $\pi(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}\pi$ であり、$\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{4}\pi$ と一致する。同様に、三葉の正葉曲線については $\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos^2 3\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{4}\pi$ である。ここで 0 から 2π までの積分を用いると二重に数えることになり、$\frac{1}{2}\pi$ を得てしまう。
- 数値的な確認：$n = 1, \ldots, 5$ について $r = \cos 2n\theta$ をプロットすると $4n$ 個の花びらの先端が見つかり、囲まれた面積のモンテカルロ法（Monte Carlo method）による推定値は毎回 $1.57 \approx \pi/2 = 1.5708$ となった。

よくある間違い

- 負の r を無視して、$r = \cos 2\theta$ の花びらを 2 枚しか描かない。
- r のループが 6 つあることから $r = \cos 3\theta$ の花びらは 6 枚であるとしてしまう。実際には負のループは正のループの上に重なる。
- 2 回描かれる曲線（$r = \cos 3\theta$ など）に $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 \, \mathrm{d}\theta$ を用いてしまい、面積を 2 倍にしてしまう。

STEP のその先へ

これらの曲線は**ロードネア**（rhodonea）曲線、すなわち正葉曲線（rose curve）と呼ばれる。点を複素数 $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ と表すと、正葉曲線 $r = \cos k\theta$ は $z = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+1)\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k-1)\theta}\right)$ となり、互いに逆向きの 2 つの円運動の和である。この見方により、正葉曲線は周転円（epicycle）やフーリエ級数（Fourier series）と結びつく。また、面積の公式 $\frac{1}{2}\int r^2 \, \mathrm{d}\theta$ は、ベクトル解析におけるグリーンの定理（Green's theorem）の特別な場合である。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、複素数をこのように幾何学的に見る方法を見事に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。