解答例

STEP III 1998、第 3 問

純粋数学 ・ 線形漸化式

> **STEP III 1998、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q3

鍵となる考え方

これは定数項をもつ 1 階線形漸化式（first-order linear recurrence）であり、微分方程式 $y' = cy - d$ の離散版にあたる。解き方の要点は常微分方程式（ODE）の場合と同じである。まず定数解（「平衡」解（equilibrium））を求め、次にそこからのずれが毎日同じ倍率で掛けられていくだけであることに気づけばよい。極限については、$c \to 0$ のとき $((1+c)^N - 1)/c$ がどうなるかを理解することだけが本質的な作業であり、それは二項定理（binomial theorem）によって決着する。

解答

$c > 0$ の場合の解

すべての T に対して $V_T = Ak^T + B$ とおいてみる。漸化式に代入すると

$$Ak^{N+1} + B = (1+c)(Ak^N + B) - d \quad \Longleftrightarrow \quad Ak^N(k - (1+c)) = cB - d.$$

右辺は N に依存しないが、左辺は 0 にならない限り N に依存する（$A \neq 0$ かつ $k \neq 0$ としたい。そうでなければこの形はただの定数である）。したがって、すべての N について両辺がともに 0 でなければならない：

$$k = 1 + c, \qquad B = \frac{d}{c},$$

ここで $c > 0$ なので c で割ってよい。これらの値のもとで、$V_T = A(1+c)^T + d/c$ は任意の定数 A に対して漸化式を満たす。$T = 0$ とおくと $V_0 = A + d/c$ となるので、$A = V_0 - d/c$ であり

$$\boxed{V_N = \left(V_0 - \frac{d}{c}\right)(1+c)^N + \frac{d}{c}}$$

考えてみよう 形を推測したらうまくいった。では、ほかに解がないとなぜわかるのだろうか。

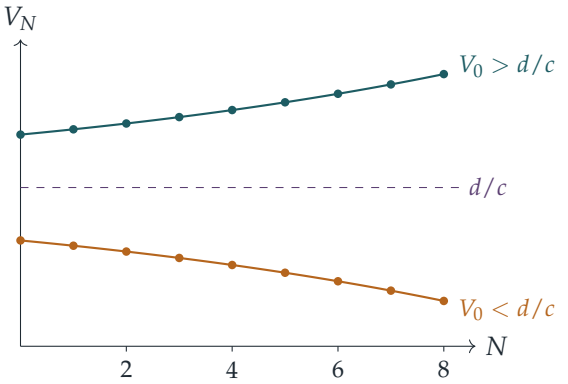
漸化式は V_0 から V_1 を定め、次に V_1 から V_2 を定め、というように進むので、与えられた V_0 をもつ数列はちょうど1つしかない。得られた式は漸化式を満たし、正しい V_0 をもつので、それがまさにその数列である。（直接的な議論を好むなら、$U_N = V_N - d/c$ とおけばよい。漸化式は $U_{N+1} = (1+c)U_N$ となるので $U_N = (1+c)^N U_0$ であり、同じ答えが得られる。）

答えを次のように変形しておくと役に立つ：

$$V_N = V_0(1+c)^N - d\,\frac{(1+c)^N - 1}{c}. \qquad (*)$$

これにはわかりやすい解釈がある。第1項は1日あたり率 c で増えていく V_0 であり、第2項は $d(1+(1+c)+\cdots+(1+c)^{N-1})$、すなわち毎日の差し引き額がそれぞれ残りの日数分だけ増えたものを、等比級数（geometric series）として足し合わせたものである。

定数 d/c は平衡値である。$V_0 > d/c$ ならば債券の価値は限りなく増加し、$V_0 = d/c$ ならばその値にとどまり、$V_0 < d/c$ ならばますます速く減少していく：



（図では $c = 0.1$、$d/c = 5$ とし、$V_0 = 6$ と $V_0 = 4$ の場合を描いている。）

$c = 0$ の場合

このとき漸化式は $V_{N+1} = V_N - d$ である。値は毎日 d ずつ減少し、等差数列（arithmetic progression）となる。よって

$$\boxed{V_N = V_0 - Nd}$$

$c > 0$ の場合の式には d/c が含まれるため、そのまま $c = 0$ を代入することはできない点に注意しよう。まさにそのために、問題は極限について問うているのである。

$c \to 0$ のときの極限

N を固定して $(*)$ を用いる。N を固定すれば $(1+c)^N \to 1$ であるから、第 1 項は V_0 に収束する。第 2 項については二項定理により展開する：

$$(1+c)^N - 1 = Nc + \binom{N}{2}c^2 + \cdots + c^N,$$

$$\text{よって} \quad \frac{(1+c)^N - 1}{c} = N + \binom{N}{2}c + \cdots + c^{N-1}.$$

N は固定されているので、これは有限個の項からなる c の多項式であり、第 1 項以外のすべての項は c の正の累乗を含む。したがって $c \to 0$ のときこれは N に収束し、

$$\lim_{c\to 0} V_N = V_0 - Nd,$$

となる。これは $c = 0$ の場合の解であり、示すべきことが示された。（同じことだが、$\big((1+c)^N - 1\big)/c$ は $x = 1$ における x^N の差分商（difference quotient）であるから、その極限は微分係数 N である。）

「N を固定して」という言葉が重要である。c が小さくても N が大きければ、$\binom{N}{2}c$ のような項は小さいとは限らず、最終的には指数的な増大が線形な振る舞いに勝つ。

検算

- $N = 1$：式は $(V_0 - d/c)(1+c) + d/c = (1+c)V_0 - d$ を与え、これは漸化式そのものである。
- $V_0 = d/c$ とすると、すべての N について $V_N = d/c$ となり、平衡状態である。
- 数値的には、$V_0 = 7$、$d = 2$、$N = 12$ として、式は $c = 0.01$ のとき $V_{12} \approx -17.48$、$c = 10^{-4}$ のとき -17.005 を与え、$V_0 - 12d = -17$ に近づいていく。また、閉じた式は多くのランダムな有理数の場合において、直接の反復計算と完全に一致する。

よくある間違い

- $B = -d/c$ としてしまう：符号は $cB - d = 0$ から決まるので、$B = +d/c$ である。
- $A = V_0 - d/c$ ではなく $A = V_0$ としてしまう：$T = 0$ においても定数 B が寄与する。
- $c > 0$ の場合の式に直接 $c = 0$ を代入しようとする：これは定義されないので、極限が必要である。

STEP のその先へ

このような漸化式は**線形差分方程式**（linear difference equations）であり、その理論は線形常微分方程式の理論と並行している。一般解は、1 つの特殊解（ここでは定数解）と斉次方程式 $U_{N+1} = (1+c)U_N$ の一般解の和である。金融の分野では、これは定額返済のローンや年金の公式であり、$c \to 0$ の極限は複利的な振る舞いから単利的な振る舞いへの移行にあたる。Boyce と DiPrima による *Elementary Differential Equations*（『初等微分方程式』）には、常微分方程式の理論と並んで 1 階差分方程式を扱う節がある。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。