解答例

STEP III 1998、第 2 問

純粋数学 ・ ベータ積分の漸化式

> **STEP III 1998、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q2

鍵となる考え方

この積分は、姿を変えたベータ関数（beta function）である。各小問ではそれぞれ定石の操作を一つずつ用いる。小問 (i) では反転（reflection）$t \mapsto 1-t$ を用いる。これは t と $1-t$ の役割を入れ替える操作である。小問 (ii) では被積分関数（integrand）に $1 = t + (1-t)$ を掛ける。小問 (iii) では部分積分（integration by parts）を行い、$(1-t)$ の指数を一つ t の側へ移す。$(1-t)$ の指数が 0 になるまで小問 (iii) を繰り返すと、すぐに計算できる積分が残る。

解答

小問 (i)

$u = 1-t$ と置換すると $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}u$ であり、積分区間の端 $t = 0, 1$ は $u = 1, 0$ になる。

$$\mathrm{I}(a,b) = \int_1^0 (1-u)^a u^b \,(-\mathrm{d}u) = \int_0^1 u^b (1-u)^a \,\mathrm{d}u = \mathrm{I}(b,a).$$

$\mathrm{d}t = -\mathrm{d}u$ から生じる負号は、積分区間の端を 0 と 1 の順に戻すときに使い切られる。

小問 (ii)

$t + (1-t) = 1$ であるから、被積分関数は次のように書ける。

$$t^a(1-t)^b = t^a(1-t)^b(t + (1-t)) = t^{a+1}(1-t)^b + t^a(1-t)^{b+1}.$$

各項を $[0,1]$ 上で積分すると、求める等式 $\mathrm{I}(a,b) = \mathrm{I}(a+1,b) + \mathrm{I}(a,b+1)$ が得られる。

小問 (iii)

$(1-t)^b$ を微分し、t^a を積分する形で $\mathrm{I}(a,b)$ を部分積分する。

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(a,b) &= \left[\frac{t^{a+1}}{a+1}(1-t)^b\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{a+1}}{a+1}\cdot(-b(1-t)^{b-1})\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^{a+1}}{a+1}(1-t)^b\right]_0^1 + \frac{b}{a+1}\int_0^1 t^{a+1}(1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

考えてみよう なぜ境界項（boundary term）は消えるのか。また、a と b が正であることはどこで必要になるのか。

$t=1$ では、$b>0$ であるから因子 $(1-t)^b$ は 0 である。$t=0$ では、$a+1>0$ であるから因子 t^{a+1} は 0 である。したがって括弧の部分は零となり、両辺に $a+1$ を掛けると

$$(a+1)\,\mathrm{I}(a,b) = b\,\mathrm{I}(a+1,b-1),$$

となって、求める結果が得られる。（$0<b<1$ のとき、最後の積分には $(1-t)$ の負の累乗が現れる。それでも $b-1>-1$ であるから、この積分は収束（converge）する。いずれにせよ、以下の整数の場合には常に $b-1\geq 0$ である。）

整数 a,b に対する $\mathrm{I}(a,b)$ の計算。得られた結果を $\mathrm{I}(a,b)=\dfrac{b}{a+1}\mathrm{I}(a+1,b-1)$ と書き、これを繰り返し適用する。各段階で第 1 引数は 1 増え、第 2 引数は 1 減る。第 2 引数が 0 に達したところで止める。

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(a,b) &= \frac{b}{a+1}\mathrm{I}(a+1,b-1) = \frac{b}{a+1}\cdot\frac{b-1}{a+2}\mathrm{I}(a+2,b-2) = \cdots \\ &= \frac{b(b-1)\cdots 1}{(a+1)(a+2)\cdots(a+b)}\mathrm{I}(a+b,0).\end{aligned}$$

公式を用いるたびに第 2 引数は正の整数であるから、どの段階も正当である。ここで $\mathrm{I}(a+b,0)=\int_0^1 t^{a+b}\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{a+b+1}$ である。また $(a+1)(a+2)\cdots(a+b)=\dfrac{(a+b)!}{a!}$ であるから、

$$\boxed{\mathrm{I}(a,b)=\frac{a!\,b!}{(a+b+1)!}}$$

この公式は、小問 (i) が要請するとおり a と b について対称（symmetric）である。また、a または b が 0 の場合にも成り立つ。

検算

▶ $\mathrm{I}(1,1)=\int_0^1(t-t^2)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ であり、公式からも $\frac{1!\,1!}{3!}=\frac{1}{6}$ が得られる。

- この公式は小問 (ii) を満たす：$\frac{(a+1)!\,b!}{(a+b+2)!} + \frac{a!\,(b+1)!}{(a+b+2)!} = \frac{a!\,b!\,(a+b+2)}{(a+b+2)!} = \frac{a!\,b!}{(a+b+1)!}$。
- 数値的には、シンプソンの公式（Simpson's rule）により $\mathrm{I}(2,3) \approx 0.0166667$ が得られ、これは $\frac{2!\,3!}{6!} = \frac{1}{60}$ と一致する。また、整数でない a, b を無作為に選んで小問 (i)–(iii) を数値積分（quadrature）で確かめたところ、約 10^{-11} の精度で一致した。

よくある間違い

- 部分積分を逆向きに行ってしまう。t^a を微分すると $(1-t)$ の指数が上がり、目指す方向とは逆になる。
- 境界項が消えることの根拠を書き忘れる。境界項が消えるのは、$a+1 > 0$ かつ $b > 0$ であるからにほかならない。
- 漸化式（recursion）の適用を一段階早く止めてしまう、あるいは $\mathrm{I}(a+b, 0)$ から生じる最後の因子 $\frac{1}{a+b+1}$ を忘れる。

STEP のその先へ

$\mathrm{I}(a,b)$ はベータ関数 $B(a+1, b+1)$ である。正の実数の引数すべてに対して、ベータ関数はガンマ関数（gamma function）と $B(x,y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$ という関係で結ばれている。ここで得た答えは、その特別な場合 $\Gamma(n+1) = n!$ にあたる。確率論では、$t^a(1-t)^b/\mathrm{I}(a,b)$ はベータ分布（beta distribution）の確率密度（density）であり、ベイズ統計学（Bayesian statistics）において中心的な役割を果たす。Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）には魅力的な解説があり、答えがなぜ $a!\,b!/(a+b+1)!$ になるのかを説明する数え上げの議論も含まれている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。