解答例

STEP III 1998、第 14 問

確率・統計 ・ 不偏推定量

> **STEP III 1998、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q14

この問題は、*Beyond STEP* の第 13.3 節「**ドイツ戦車問題**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch13/german-tanks.html

鍵となる考え方

Z_2 は独立（independent）な部分の和なので、その平均（mean）と分散（variance）は一様（uniform）な確率変数 1 個の平均と分散からただちに求まる。Z_1 は最大値（maximum）に依存しており、最大値を扱う自然な方法は分布関数（distribution function）を通すことである。X_i のうち最大のものが m 以下となるのは、**すべての** X_i が m 以下となるとき、かつそのときに限る。これは確率の積に書き換えられ、それを微分すれば確率密度関数（density）が得られる。

解答

Z_2 の平均

各 X_i は $[0, N]$ 上で密度 $1/N$ をもつので、

$$\mathrm{E}(X_i) = \frac{N}{2}, \qquad \mathrm{E}(X_i^2) = \frac{1}{N}\int_0^N x^2\,\mathrm{d}x = \frac{N^2}{3}, \qquad \mathrm{Var}(X_i) = \frac{N^2}{3} - \frac{N^2}{4} = \frac{N^2}{12}.$$

期待値の線形性（linearity of expectation）により、

$$\mathrm{E}(Z_2) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(X_i) = \frac{2}{n}\cdot n\cdot\frac{N}{2} = N.$$

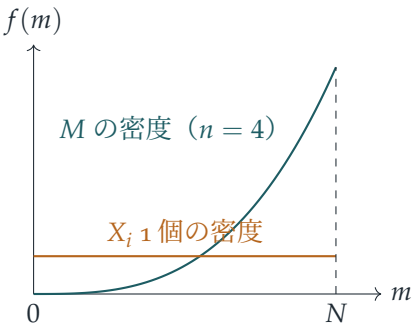
最大値の分布

$M = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ とおく。$0 \le m \le N$ のとき、事象 $M \le m$ が起こるのは、すべての i について $X_i \le m$ となるとき、かつそのときに限る。さらに X_i は独立であるから、

$$\mathrm{P}(M \le m) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(X_i \le m) = \left(\frac{m}{N}\right)^n.$$

これを微分すると、M の密度は

$$f(m) = \frac{n\, m^{n-1}}{N^n}, \qquad 0 \le m \le N.$$



最大値は N の近くに集中する。だからこそ、不偏（unbiased）にするには小さな補正係数を掛けるだけで済むのである。そのモーメントは

$$\mathrm{E}(M) = \int_0^N m \cdot \frac{n\, m^{n-1}}{N^n}\, \mathrm{d}m = \frac{n}{N^n} \cdot \frac{N^{n+1}}{n+1} = \frac{n}{n+1} N,$$
$$\mathrm{E}(M^2) = \int_0^N m^2 \cdot \frac{n\, m^{n-1}}{N^n}\, \mathrm{d}m = \frac{n}{n+2} N^2.$$

Z_1 の平均

$$\mathrm{E}(Z_1) = \frac{n+1}{n}\, \mathrm{E}(M) = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} N = N.$$

よって、求められているとおり、どちらの推定量（estimator）も平均は N である。

分散

Z_1 については、まず

$$\mathrm{Var}(M) = \frac{n}{n+2} N^2 - \frac{n^2}{(n+1)^2} N^2 = \frac{n\left[(n+1)^2 - n(n+2)\right]}{(n+2)(n+1)^2} N^2 = \frac{n}{(n+2)(n+1)^2} N^2,$$

となる。ここで $(n+1)^2 - n(n+2) = 1$ を用いた。これに $\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$ を掛けて、

$$\boxed{\mathrm{Var}(Z_1) = \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{n}{(n+2)(n+1)^2} N^2 = \frac{N^2}{n(n+2)}.}$$

Z_2 については、X_i が独立なので分散は足し合わせられる。

$$\boxed{\mathrm{Var}(Z_2) = \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) = \frac{4}{n^2} \cdot n \cdot \frac{N^2}{12} = \frac{N^2}{3n}.}$$

考えてみよう どちらが小さいか。そして、それは常に同じ方か。

比は

$$\frac{\mathrm{Var}(Z_1)}{\mathrm{Var}(Z_2)} = \frac{3n}{n(n+2)} = \frac{3}{n+2}.$$

これは $n = 1$ のとき 1 に等しく（このとき $Z_1 = Z_2 = 2X_1$ であり、二つの推定量は実際に同一である）、$n \geq 2$ のすべてで 1 より小さい。

どちらを選ぶべきか

どちらも不偏なので、ばらつきを比べる。Z_1 の方が望ましい。

- $n \geq 2$ では Z_1 の分散の方が真に小さく、その差は n とともに大きくなる。$\mathrm{Var}(Z_1)$ は $1/n^2$ のように減少するが、$\mathrm{Var}(Z_2)$ は $1/n$ のようにしか減少しない。たとえば $n = 10$ のとき、Z_1 の標準偏差（standard deviation）は約 $0.09N$ であるのに対し、Z_2 は約 $0.18N$ である。
- Z_1 は常に、観測された識別番号の最大値以上である。N も当然そうでなければならない。一方 Z_2 は、実際に観測した番号よりも小さくなることがあり（たとえば観測値が 1, 2, 30 なら $Z_2 = 22$ となる）、ありえないとわかっている推定値を与えてしまう。

検算

- $n = 1$ のとき、どちらの公式も $N^2/3$ を与える。$Z_1 = Z_2 = 2X_1$ であり、$\mathrm{Var}(2X_1) = 4 \cdot N^2/12$ なので、そうなるはずである。
- $N = 10$、試行回数 200 000 のシミュレーションでは、どちらの推定量も標本平均は 10 との差が 0.01 以内であった。また $n = 4$ のとき標本分散は 4.16 と 8.33 であり、理論値 $\frac{100}{24} \approx 4.17$ と $\frac{100}{12} \approx 8.33$ と一致した。

よくある間違い

- 最大値の密度を直接扱おうとすること。まず $\mathrm{P}(M \le m)$ を経由せよ。独立性によって、それは単純な積になる。
- 定数を 2 乗し忘れること。$\mathrm{Var}(cY) = c^2 \mathrm{Var}(Y)$ であるから、掛ける係数は $\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$ と $\frac{4}{n^2}$ である。

STEP のその先へ

これは古典的な「ドイツ戦車問題（German tank problem）」である。第二次世界大戦中、連合国の統計学者たちはこの手法を用いて、シリアル番号からドイツの戦車生産数を驚くほど正確に推定した。ここで最大値は**十分統計量**（sufficient statistic）である。すなわち、最大値がわかってしまえば、標本の残りの部分は N について何の追加情報ももたらさない。さらにレーマン・シェフェ（Lehmann–Scheffé）の定理により、Z_1 はすべての不偏推定量の中で分散が最小であることが示される。十分性と有効推定量は大学 1 年の統計学で扱われる。順序統計量（order statistics）を学び始めるには、Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率論入門）がよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。