解答例

STEP III 1998、第 13 問

確率・統計 ・ 最尤推定

> **STEP III 1998、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q13

鍵となる考え方

ここでの未知数は n であり、しかも整数であるから、微分法（calculus）は役に立たない。n について微分することはできないのである。数列（sequence）を最大化する標準的な道具は、隣り合う項の比（ratio）を調べることである。比が 1 を超えている間は数列は増加し、比が 1 を下回ると減少する。そして、どこかで比がちょうど 1 に等しくなるときに限り、同点（最尤推定値（maximum likelihood estimate、MLE）が 2 つ）が生じる。

解答

公平な硬貨（fair coin）を n 回投げたときの表の回数は二項分布（binomial distribution）に従うから、

$$\mathrm{P}(k \text{ 回表が出る（全}n \text{ 回中）}) = \binom{n}{k}\frac{1}{2^n}, \qquad n \geq k,$$

であり、$n < k$ ならばこの確率は 0 である。以下では常に $k \geq 1$（友人は少なくとも 1 回は表を見ている）とするので、候補となるのは $n \geq k$ のみである。

公平な硬貨の場合の一般的な計算

$n \geq k$ に対して $L(n) = \binom{n}{k}2^{-n}$ とおき、k を固定した n の関数とみなす。$n \geq k$ のとき、

$$\frac{L(n+1)}{L(n)} = \frac{\binom{n+1}{k}}{\binom{n}{k}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{n+1}{n+1-k} \cdot \frac{1}{2},$$

である。ここで $\binom{n+1}{k} = \frac{n+1}{n+1-k}\binom{n}{k}$ を用いた。$n+1-k>0$ であるから、不等号の向きを変えることなく分母を払うことができる：

$$\frac{L(n+1)}{L(n)} \geq 1 \iff n+1 \geq 2(n+1-k) \iff n \leq 2k-1,$$

であり、等号が成り立つのはちょうど $n=2k-1$ のときである。したがって

$$L(k) < L(k+1) < \cdots < L(2k-1) = L(2k) > L(2k+1) > L(2k+2) > \cdots .$$

考えてみよう 比から、最大値がどこにあるかがどのようにわかるのか？

$n < 2k-1$ では比は 1 より大きいので、各項は直前の項より大きい。すなわち数列は $n=2k-1$ まで狭義単調に増加する。$n=2k-1$ では比はちょうど 1 であるから、$L(2k) = L(2k-1)$ となる。$n > 2k-1$ では比は 1 より小さく、数列はそれ以降狭義単調に減少する。よって、最大値をとる n の値はちょうど 2 つである。

表が 1 回の場合

$k=1$ のとき、2 つの最尤推定値は $n = 2k-1 = 1$ と $n = 2k = 2$ である。直接計算すると

$$L(1) = \tfrac{1}{2}, \quad L(2) = 2\cdot\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2}, \quad L(3) = 3\cdot\tfrac{1}{8} = \tfrac{3}{8},$$

であり、上の議論から $L(n)$ は $n=2$ 以降減少し続ける。よって、求めるとおり最尤推定値は 1 と 2 の 2 つである。

表が k 回の場合

一般的な計算により、投げた回数の 2 つの最尤推定値は

$$n = 2k-1 \quad \text{および} \quad n = 2k.$$

である。

偏りのある硬貨

次に $0<p<1$、$q = 1-p$ とする。このとき

$$L(n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \qquad n \geq k.$$

である。$n \geq k$ のとき、因子 p^k は約分され、因子 q が 1 つ余分に現れる：

$$\frac{L(n+1)}{L(n)} = \frac{(n+1)q}{n+1-k}.$$

ここでも $n+1-k>0$ であるから、

$$\frac{L(n+1)}{L(n)} \gtreqless 1 \iff (n+1)(1-p) \gtreqless n+1-k \iff k \gtreqless (n+1)p \iff n+1 \lesseqgtr \frac{k}{p}.$$

したがって L は $n+1<k/p$ の間は増加し、$n+1=k/p$ のとき横ばいとなり、$n+1>k/p$ になると減少する。$p<1$ より $k/p>k$ であるから、転換点は範囲 $n\geq k$ の内部にあることに注意する。

- k/p が整数で**ない**とき、$m=\lfloor k/p\rfloor$ とおく。このとき $n+1<k/p$ となるのはちょうど $n+1\leq m$ のときであるから、$L(k)<\cdots<L(m)$ であり、$L(m+1)<L(m)$ でその後も減少が続く。最尤推定値はただ 1 つで、

  $$n=\left\lfloor \frac{k}{p} \right\rfloor.$$

  である。

- $k/p=N$ が整数のとき、L は $L(N-1)$ まで増加し、$L(N)=L(N-1)$ となり、その後減少する。最尤推定値は 2 つで、

  $$n=\frac{k}{p}-1 \quad \text{および} \quad n=\frac{k}{p}.$$

  である。いずれも k 以上である。実際、N は $N>k$ をみたす整数であるから、$N-1\geq k$ が成り立つ。

よって、最尤推定値が一意であるのは k/p **が整数でないとき、かつそのときに限る**。公平な硬貨では $k/p=2k$ は常に整数であり、これが前の小問で常に 2 つの最尤推定値 $2k-1$ と $2k$ が得られた理由である。

検算

- 答えは理にかなっている。表が k 回出て、表の出る確率が p ならば、投げた回数はおよそ k/p 回と予想され、最尤推定値は k/p の小数点以下を切り捨てたもの（整数のときはその前後の同点）である。
- $p=\frac{1}{3}$、$k=1$ とすると $k/p=3$ である。このとき $L(2)=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$、$L(3)=3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}=\frac{4}{9}$ で同点となり、一方 $L(4)=4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{27}=\frac{32}{81}<\frac{4}{9}$ である。
- コンピュータで分数を用いて $L(n)$ を厳密に計算し、公平な硬貨で $k=1,\ldots,39$ の場合（常に $\{2k-1,2k\}$）と、p が分母 12 以下の分数で $k\leq 14$ である 924 組の (p,k) について、最大値をとる点を求めた。すべての場合が上の規則と一致した。

よくある間違い

- n について微分してしまうこと。ここで n は整数であり、$\binom{n}{k}$ は特別な道具立てなしには n のそれ以外の値に対して定義されない。比を調べる方法こそが正しい道具である。
- 不等号の向きを逆にしてしまうこと、あるいは、比が 1 に等しくなることこそが 2 つ目の最尤推定値を生むことを忘れること。
- すべての場合に $\lfloor k/p \rfloor$ と答え、k/p が整数のときの同点を見落とすこと。

STEP のその先へ

最尤法（maximum likelihood）は統計学における推定の中心的な方法である。観測されたデータが最も起こりやすくなるようなパラメータの値を選ぶのである。通常パラメータは連続的であり、対数尤度（log-likelihood）を微分法によって最大化する。n のような整数を推定する問題（「試行回数」の問題）は、この方法が使えない古典的な例であり、この問題は最尤推定値が一意であるとすら限らないことを示している。Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率論入門）は二項分布の解説が優れており、Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は背景となる確率論を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。