解答例

STEP III 1998、第 12 問

確率・統計 ・ ネットワークの信頼性

STEP III 1998、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/98-s3-q12

鍵となる考え方

道路は 6 本しかないので、開通・閉鎖のパターンは $2^6 = 64$ 通りしかない。最も見通しのよい方法は**悪い**パターン、すなわち村々が互いに行き来できないいくつかのグループに分かれてしまうパターンを数えることである。悪いパターンを開通している道路の本数で分類すると、数え上げは非常に短くなる。4 つの村からなるネットワークで開通している道路が 4 本以上あれば、決して非連結（disconnected）にはならないからである。

始める前に注意しておく。問題用紙に印刷された式では括弧の前の係数が p^2 となっているが、正しい係数は p^3 である。印刷された式が正しくありえないことは「検算」で示す。ここでは修正した結果

$$P = 1 - p^3(6p^3 - 12p^2 + 3p + 4).$$

を証明する。

解答

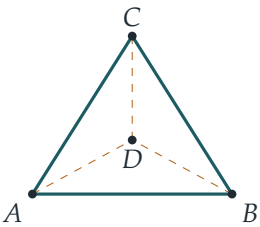
ある道路が開通している確率を $q = 1 - p$ と書く。各道路は独立（independent）に振る舞うので、k 本が開通し $6 - k$ 本が閉鎖された特定のパターンの確率は $q^k p^{6-k}$ である。ネットワークが**非連結**である事象、すなわちある村から別のある村へ到達できない事象を D とする。このとき $P = 1 - \mathbb{P}(D)$ であり、$\mathbb{P}(D)$ はすべての非連結パターンにわたる $q^k p^{6-k}$ の和である。これらを開通している道路の本数 k によって数える。

開通している道路が 4 本以上：決して非連結にならない。 ネットワークが非連結ならば、村々は少なくとも 2 つのグループに分かれ、グループ間には開通した道路がない。可能な分かれ方は $1+3$（孤立した 1 つの村と残りの 3 つ）と $2+2$ だけである。開通している道路はすべてグループの内部にある。$1+3$ の分かれ方では 3 つの村のグループには道路が 3 本しかなく、$2+2$ の分かれ方では各組に道路が 1 本ずつしかないので合計 2 本である。いずれにせよ、開通しうる道路は高々 3 本である。したがって、開通している道路が $k \geq 4$ 本のパターンはすべて連結（connected）である。

開通している道路がちょうど 3 本。

> **考えてみよう** 開通している道路が 3 本のとき、4 つの村すべてを連結しないのはどのパターンか。

上の議論により、開通した道路が 3 本の非連結パターンは $1+3$ の分かれ方であり、3 つの村のグループ内の 3 本の道路がすべて開通していなければならない。すなわち三角形（triangle）ができて、4 つ目の村が孤立する。孤立する村の選び方は 4 通りなので、そのようなパターンは 4 通りである。（残りの $\binom{6}{3} - 4 = 16$ 通りのパターンは四面体（tetrahedron）の全域木（spanning tree）であり、連結である。）



開通している道路 AB, BC, CA（実線）、
D への閉鎖された道路（破線）：
D は孤立する

開通している道路が 2 本以下：常に非連結。 4 つの村を結ぶには少なくとも 3 本の道路が必要である（各道路は、A から到達可能なグループに新しい村を高々 1 つしか加えられない）。したがって、開通した道路が 2 本のパターン $\binom{6}{2} = 15$ 通り、1 本のパターン 6 通り、0 本のパターン 1 通りはすべて非連結である。

合計する。 したがって

$$\mathbb{P}(D) = 4p^3q^3 + 15p^4q^2 + 6p^5q + p^6 = p^3\left(4q^3 + 15pq^2 + 6p^2q + p^3\right).$$

ここで $q = 1 - p$ として括弧の中を展開する。

$$\begin{aligned} 4(1-p)^3 &= 4 - 12p + 12p^2 - 4p^3, \\ 15p(1-p)^2 &= 15p - 30p^2 + 15p^3, \\ 6p^2(1-p) &= 6p^2 - 6p^3, \\ p^3 &= p^3. \end{aligned}$$

足し合わせると、定数項は 4、p の項は $-12p + 15p = 3p$、p^2 の項は $12 - 30 + 6 = -12$、p^3 の項は $-4 + 15 - 6 + 1 = 6$ となる。よって

$$\mathbb{P}(D) = p^3\left(6p^3 - 12p^2 + 3p + 4\right), \qquad \text{したがって} \qquad P = 1 - p^3\left(6p^3 - 12p^2 + 3p + 4\right).$$

検算

- $p = 0$（どの道路も閉鎖されない）のとき $P = 1$ となり、$p = 1$ のとき $P = 1 - (6 - 12 + 3 + 4) = 0$ となる。どちらも正しいが、どちらも p^2 版でも成り立つので、両者を区別することはできない。
- p が小さい場合を考えると両者を区別できる。非連結になるには少なくとも 3 本の道路（たとえば 1 つの村につながる 3 本）が閉鎖されている必要があるので、p が小さいとき $\mathbb{P}(D)$ はおよそ $4p^3$ になるはずである。われわれの式は $\mathbb{P}(D) \approx 4p^3$ を与えるが、印刷された式では $4p^2$ となり、これはありえない。
- $p = \frac{1}{3}$ のとき、われわれの式は $P = 1 - \frac{1}{27} \cdot \frac{105}{27} = \frac{208}{243} \approx 0.856$ を与える。64 通りすべてのパターンを p の 21 個の値についてコンピュータで数え上げた結果は p^3 版の式と完全に一致し、$p = 0.4$ で 200 000 回の降雪をシミュレーションした結果は、式の値 0.7655 に対して 0.767 であった。

よくある間違い

- 孤立した村がある場合だけを数え、$2 + 2$ の分かれ方の確認を忘れること。ここでは新しいものは何も加わらない。$2 + 2$ の分かれ方では開通した道路は高々 2 本なので、それらのパターンはすでに「2 本以下」の数に含まれている。それでも、そのことは明記する必要がある。
- 「A が孤立する」と「B が孤立する」のような重なりのある事象の確率を、重なりを補正せずに足し合わせること。パターン全体を数えれば重複して数えることを避けられる。
- 印刷された p^2 を信じて、計算を無理にそれに合わせること。誠実に計算した結果が「〜を示せ」と食い違うときは、特別な場合で確かめてみるとよい。

STEP のその先へ

これは**ネットワーク信頼性**（network reliability）の小さな例である。グラフの各辺が独立に故障するとき、残ったグラフが連結である確率を求めたい。答えは常に p の多項式であり、その係数は連結な全域部分グラフ（connected spanning subgraph）の個数を数えている（ここでは開通した道路が 6, 5, 4, 3 本の場合にそれぞれ 1, 6, 15, 16）。大きなグラフではこれを求めることは計算量的に困難であり、タット多項式（Tutte polynomial）やパーコレーション理論（percolation theory）と深く結びついている。確率論の側面を身につけるには Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）がよく、Bollobás の *Modern Graph Theory*（現代グラフ理論）はランダムグラフとタット多項式を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。