解答例

STEP III 1998、第 11 問

力学 ・ 大振幅の振り子

> **STEP III 1998、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q11

この問題は、*Beyond STEP* の第 11.3 節「**本当の振り子**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch11/real-pendulum.html

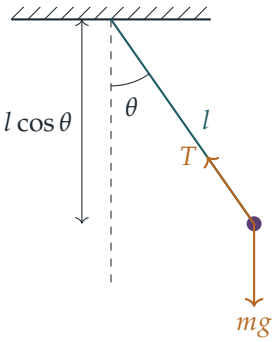
鍵となる考え方

エネルギー保存（energy conservation）から各角度における角速度（angular speed）が求まり、周期（period）は 4 分の 1 振動に要する時間の 4 倍、$\int \mathrm{d}t = \int \mathrm{d}\theta/\dot{\theta}$ である。半角公式（half-angle identity）$\cos\theta = 1 - 2\sin^2(\theta/2)$ を用いると、エネルギーの式は被積分関数の形に書き換えられる。指示された置換（substitution）により $\theta = \gamma$ における厄介な無限大が取り除かれ、x が小さいときの $(1-x)^{-1/2}$ という形の被積分関数が残る。これこそ二項展開（binomial expansion）の出番である。

解答

エネルギーの式

振り子（pendulum）を、長さ l の軽くて伸び縮みしない糸につながれた質量 m の質点としてモデル化し、空気抵抗なしに鉛直面内で振動するものとする。θ は鉛直下向きから測る。



おもりは支点から深さ $l\cos\theta$ の位置にある。張力（tension）は糸に沿って働き、おもりの速度（円弧に沿う向き）と垂直であるから、仕事をしない。仕事をするのは重力だけであり、力学的エネルギー（mechanical energy）は保存される。おもりの速さは $l\dot{\theta}$ である。

最大の振れ角 $\theta = \gamma$ において、おもりは瞬間的に静止する。そこから一般の角度 θ までの間に、おもりは高さ $l\cos\theta - l\cos\gamma$ だけ下がるので、

$$\tfrac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 = mgl(\cos\theta - \cos\gamma) \quad \Longrightarrow \quad \tfrac{1}{2}l\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = g(\cos\theta - \cos\gamma),$$

となる。これが最初の結果である。

周期

両方の余弦に $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2(\alpha/2)$ を用いると、

$$\cos\theta - \cos\gamma = 2\big(\sin^2(\gamma/2) - \sin^2(\theta/2)\big),$$

となるので、エネルギーの式は

$$\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{4g}{l}\big(\sin^2(\gamma/2) - \sin^2(\theta/2)\big).$$

となる。対称性（運動は可逆であり、エネルギーの式は $\theta \mapsto -\theta$ で不変である）により、4 つの 4 分の 1 振動 $0 \to \gamma \to 0 \to -\gamma \to 0$ に要する時間はすべて等しい。$\theta = 0$ から $\theta = \gamma$ までの 4 分の 1 振動の間は θ が増加しているので、正の平方根をとる：

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\left(\sin^2(\gamma/2) - \sin^2(\theta/2)\right)^{-1/2}.$$

0 から γ まで積分して 4 倍すると、

$$P = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\gamma}\left(\sin^2(\gamma/2) - \sin^2(\theta/2)\right)^{-1/2}\mathrm{d}\theta,$$

となり、求める式が得られる。（被積分関数はおもりが静止する $\theta = \gamma$ で発散するが、積分は収束（converge）する。以下の置換によりこのことが明示的にわかる。）

小振幅近似

$k=\sin(\gamma/2)$ とおく。$0<\gamma<\pi$ であるから $0<k<1$ である。さらに $\sin(\theta/2)=k\sin\phi$ とおく。θ が 0 から γ まで動くとき、$\sin\phi$ は 0 から 1 まで動くので、ϕ は 0 から $\pi/2$ まで動く。微分すると、

$$\tfrac{1}{2}\cos(\theta/2)\,\mathrm{d}\theta = k\cos\phi\,\mathrm{d}\phi.$$

$0\le\theta/2<\pi/2$ かつ $0\le\phi\le\pi/2$ であるから、どちらの余弦も非負であり、

$$\cos(\theta/2)=\sqrt{1-k^2\sin^2\phi},\qquad \left(k^2-k^2\sin^2\phi\right)^{1/2}=k\cos\phi.$$

考えてみよう この置換によって、厄介な因子 $(\sin^2(\gamma/2)-\sin^2(\theta/2))^{-1/2}$ はどうなるか。

これは $1/(k\cos\phi)$ となり、$\mathrm{d}\theta$ に含まれる $k\cos\phi$ とちょうど打ち消し合う：

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\left(k^2-\sin^2(\theta/2)\right)^{1/2}}=\frac{1}{k\cos\phi}\cdot\frac{2k\cos\phi\,\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}=\frac{2\,\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}.$$

したがって

$$P=4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\left(1-k^2\sin^2\phi\right)^{-1/2}\mathrm{d}\phi,$$

となり、被積分関数はまったく素直な振る舞いをする積分が得られる。（ここまでは厳密である。）

γ が小さいとき、$x=k^2\sin^2\phi$ は $0\le x\le k^2$ を満たし小さいので、二項展開 $(1-x)^{-1/2}=1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\cdots$ により

$$\left(1-k^2\sin^2\phi\right)^{-1/2}\approx 1+\tfrac{1}{2}k^2\sin^2\phi,$$

が得られ、誤差は k^4 のオーダーである。$\int_0^{\pi/2}\sin^2\phi\,\mathrm{d}\phi=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(1-\cos 2\phi)\,\mathrm{d}\phi=\frac{\pi}{4}$ であるから、

$$P\approx 4\sqrt{\frac{l}{g}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{k^2}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\right)=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{k^2}{4}\right).$$

最後に、γ が小さいとき $k=\sin(\gamma/2)\approx\gamma/2$（誤差は γ^3 のオーダー）であるから、γ^4 のオーダーの項を除いて $k^2\approx\gamma^2/4$ となり、

$$P\approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{\gamma^2}{16}\right),$$

となって、求める結果が得られる。主要項はおなじみの微小振動の周期であり、補正項は振れ幅が大きいほど周期がわずかに長くなることを示している。

検算

- $\gamma \to 0$ とすると、線形化された方程式 $\ddot{\theta} = -(g/l)\theta$ から得られる周期 $2\pi\sqrt{l/g}$ に戻る。
- 次元：$\sqrt{l/g}$ は時間の次元をもち、γ は無次元である。
- 数値的に、$l/g = 1.7/9.81$、$\gamma = 0.5$ として、方程式 $\ddot{\theta} = -(g/l)\sin\theta$ を刻み幅の細かいルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）で解くと $P = 2.65705$ となり、厳密な ϕ の積分と表示した桁まですべて一致する。近似式からは 2.65646 が得られ、相対誤差は約 2×10^{-4} である。この誤差は γ^4 に比例して変化し（およそ $0.0036\gamma^4$）、γ^2 の項が正しいことが確かめられる。

よくある間違い

- 因子 4 を忘れる。0 から γ までの積分は周期の 4 分の 1 にすぎない。
- 展開の前に、置換の中で $\cos(\theta/2) \approx 1$ としてしまう。これは求めようとしている補正項と同じオーダーの $k^2\sin^2\phi$ の項を捨てることになる。二項展開の段階までは $\sqrt{1 - k^2\sin^2\phi}$ を厳密なまま残しておくこと。
- $1 + k^2/4$ で止めてしまい、$k = \sin(\gamma/2)$ を $\gamma/2$ に直さない。

STEP のその先へ

厳密な積分 $\int_0^{\pi/2}(1 - k^2\sin^2\phi)^{-1/2}\,\mathrm{d}\phi$ は**第 1 種完全楕円積分**（complete elliptic integral of the first kind）$K(k)$ であり、厳密な周期は $4\sqrt{l/g}\,K(\sin(\gamma/2))$ である。二項級数をさらに続けると $1 + \frac{1}{16}\gamma^2 + \frac{11}{3072}\gamma^4 + \cdots$ が得られる。また、ガウス（Gauss）は算術幾何平均（arithmetic–geometric mean）を用いると K を驚くほど速く計算できることを発見した。周期が振幅に依存するという事実は、非線形振動（nonlinear oscillation）の最も簡単な例である。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、大学 1 年生のレベルで振り子と振動を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。