解答例

STEP III 1998、第 10 問

力学 ・ 斜め衝突

> **STEP III 1998、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q10

鍵となる考え方

質量が等しいとき、2 つの保存則（conservation laws）のどちらからも質量が消え、すっきりした 2 つのベクトルの等式が残る。すなわち、速度の**和**が変わらないことと、**速さの 2 乗の和**が変わらないことである。$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2$ と $|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2$ を比べると内積（scalar product）$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ だけが取り出され、この 1 つの量が問題のすべての部分を動かしている。最後の部分では、2 つ目の球の速度がわかれば運動量によって 1 つ目の球の速度が決まるので、エネルギーの式は未知の速さ 1 つについての二次方程式（quadratic）になる。そして実数解をもつ二次方程式の判別式（discriminant）は負でない。

解答

2 つの球を、なめらかな（smooth）台の上を動く質量 m の等しいなめらかな球としてモデル化する。こうすると、衝突の間にはたらく水平方向の力は、球どうしが互いに及ぼし合う力だけである。

保存則と相対速さ

運動量（momentum）と運動エネルギー（kinetic energy）から

$$m\mathbf{v}_1+m\mathbf{v}_2=m\mathbf{v}_1'+m\mathbf{v}_2',$$
$$\tfrac{1}{2}m|\mathbf{v}_1|^2+\tfrac{1}{2}m|\mathbf{v}_2|^2=\tfrac{1}{2}m|\mathbf{v}_1'|^2+\tfrac{1}{2}m|\mathbf{v}_2'|^2,$$

が得られる。すなわち

$$\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2=\mathbf{v}_1'+\mathbf{v}_2' \quad (1), \qquad |\mathbf{v}_1|^2+|\mathbf{v}_2|^2=|\mathbf{v}_1'|^2+|\mathbf{v}_2'|^2 \quad (2).$$

である。(1) の両辺それぞれについて、自分自身との内積をとると

$$|\mathbf{v}_1|^2 + |\mathbf{v}_2|^2 + 2\,\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = |\mathbf{v}_1'|^2 + |\mathbf{v}_2'|^2 + 2\,\mathbf{v}_1' \cdot \mathbf{v}_2'.$$

となる。ここから (2) を引くと

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1' \cdot \mathbf{v}_2'. \qquad (3)$$

が残る。さて、相対速さ（relative speed）の 2 乗は

$$|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2 = |\mathbf{v}_1|^2 + |\mathbf{v}_2|^2 - 2\,\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2,$$

であり、(2) と (3) より右辺の各項は衝突の前後で同じである。よって $|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2 = |\mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_2'|^2$ であり、速さは負でないから $|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| = |\mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_2'|$ となる。つまり相対速さは保存される。

一方の球がはじめ静止している場合

$\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ とする。このとき (3) より

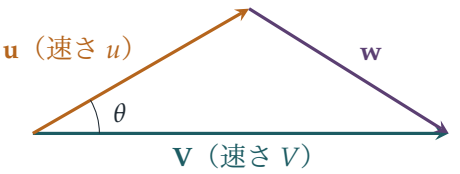
$$\mathbf{v}_1' \cdot \mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{0} = 0.$$

である。衝突後は両方の球が動いているので $\mathbf{v}_1' \neq \mathbf{0}$ かつ $\mathbf{v}_2' \neq \mathbf{0}$ であり、内積が 0 であることは、衝突後の 2 つの速度が垂直であることを意味する。（この条件がなければ、一方の速度が 0 であるという理由だけで内積が 0 になることもありうる。正面衝突（head-on collision）がその例で、このとき 2 つの球は単に速度を入れ替える。）

エネルギーが失われる衝突

今度は (1) は依然として成り立つが、(2) は成り立たない。静止している球を A、動いている球を B とよぶ。B ははじめ $|\mathbf{V}| = V$ である速度 $\mathbf{V}$ をもち、衝突後は $\mathbf{V}$ と角 θ をなす速さ u の速度 $\mathbf{u}$ をもつとする。A の衝突後の速度を $\mathbf{w}$ とする。

運動量から $\mathbf{V} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ となるので、3 つの速度は三角形をなす。



したがって $\mathbf{w} = \mathbf{V} - \mathbf{u}$ であり、$\mathbf{V} \cdot \mathbf{u} = Vu\cos\theta$ であるから

$$|\mathbf{w}|^2 = V^2 - 2Vu\cos\theta + u^2$$

となる（三角形における余弦定理（cosine rule）である）。衝突後の運動エネルギーは、はじめの運動エネルギーの $1-k$ 倍である。$\frac{1}{2}m$ を約すと

$$u^2+|\mathbf{w}|^2=(1-k)V^2 \quad\Longrightarrow\quad 2u^2-2Vu\cos\theta+V^2=(1-k)V^2,$$

となるので、2 つ目の球の衝突後の速さ u は

$$\boxed{2u^2-2Vu\cos\theta+kV^2=0.}$$

を満たす。

考えてみよう 問題が求めているのは $k\le\frac{1}{2}$ を示すことだけである。手もとにあるのが等式だけのとき、不等式はどこから出てくるのだろうか。

速さ u は実際に現れる実数なので、u についてのこの二次方程式は実数解をもつ。したがって判別式は負でない：

$$4V^2\cos^2\theta-8kV^2\ge 0 \quad\Longrightarrow\quad k\le\tfrac{1}{2}\cos^2\theta\le\tfrac{1}{2},$$

ここで $8V^2>0$（2 つ目の球は動いている）で割り、$\cos^2\theta\le 1$ を用いた。よって、示すべきとおり $k\le\frac{1}{2}$ である。

等号が成り立つには $\cos^2\theta=1$ かつ重解（double root）$u=\frac{1}{2}V\cos\theta$ であることが必要である。$u\ge 0$ であるから、これは $\theta=0$ かつ $u=\frac{1}{2}V$ を意味し、このとき $\mathbf{w}=\frac{1}{2}\mathbf{V}$ でもある。つまり 2 つの球は半分の速さで一体となって動き出す。これは完全非弾性（perfectly inelastic）の正面衝突である。失われうる運動エネルギーは高々半分である。

検算

- $k=0$ のとき $2u^2=2Vu\cos\theta$ となり、$u=V\cos\theta$（または $u=0$）である。このとき $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{V}-\mathbf{u})=Vu\cos\theta-u^2=0$ であるから、$\mathbf{w}=\mathbf{V}-\mathbf{u}$ は $\mathbf{u}$ と垂直である。これは 2 つ目の部分の結果と一致する。
- 反発係数（coefficient of restitution）e の正面衝突では $k=\frac{1}{2}(1-e^2)$ となり、これは 0 と $\frac{1}{2}$ の間にある。$e=0.3$ のとき $k=0.455$ である。
- 数値的には、等しいなめらかな球どうしのランダムな弾性衝突（elastic collision）を 10^5 回シミュレーションした。運動量、運動エネルギー、$\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2$、相対速さはいずれも 10^{-13} 以内で一致した。エネルギーが失われるランダムな結果 2×10^5 通りでは二次方程式が 10^{-14} の精度で成り立ち、見つかった k の最大値は 0.49999 であった。

よくある間違い

- 「相対速さ」を $\big||\mathbf{v}_1| - |\mathbf{v}_2|\big|$ と考えてしまう。相対速さとは相対**速度**の大きさ $|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$ のことである。
- 2 つ目の部分で、両方の球が動いているという事実を使い忘れる。内積が 0 であることが垂直を意味するのは、どちらのベクトルも 0 でない場合に限られる。
- 最後の部分で、(2) や (3) を再び使ってしまう。これらは運動エネルギーの保存から得られたものであり、もはや成り立たない。残るのは運動量だけである。

STEP のその先へ

内積を用いた議論は、標準的な手法を座標系によらない形にしたものである。すなわち、運動量がゼロとなる座標系（zero-momentum frame）では、弾性衝突は 2 つの速度の大きさを保ったまま、それらを回転させるだけである。失われる割合の最大値 $\frac{1}{2}$ は、失われうるのは質量中心（centre of mass）に対する相対的な運動エネルギーだけであるという一般的な事実の表れであり、ここではそれが $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mV^2$ である。これらの考え方は散乱理論（scattering theory）や特殊相対性理論（special relativity）における衝突へとつながっていく。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、重心系での衝突を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。