解答例

STEP III 1998、第 1 問

純粋数学 ・ 曲線の概形

> **STEP III 1998、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q1

鍵となる考え方

すべてを $\cos x$ で表す。$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ を用いると、関数 f は $\cos x$ の 2 次式になる。平方完成（completing the square）をすれば f の値域（range）が一目でわかり、この値域が最後の小問を支配する。g については、商の微分法（quotient rule）により、その導関数（derivative）は $\mathrm{f}'(x)$ の定数倍を平方で割ったものになる。

解答

$y = \mathrm{f}(x)$ の概形を描く

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ を用いると、

$$\mathrm{f}(x) = 2 + 2\cos x - \cos^2 x = 3 - (1 - \cos x)^2.$$

$0 \le 1 - \cos x \le 2$ であるから、$-1 \le \mathrm{f}(x) \le 3$ を得る。値 3 は $\cos x = 1$ のときにとり、値 -1 は $\cos x = -1$ のときにとる。

微分すると、

$$\mathrm{f}'(x) = -2(1 - \cos x)\sin x = 2\sin x\,(\cos x - 1).$$

これが 0 となるのは $\sin x = 0$ または $\cos x = 1$ のときであり、$[0, 2\pi]$ 上では $x = 0,\ \pi,\ 2\pi$ である。停留点（stationary point）は

$$(0,\ 3), \qquad (\pi,\ -1), \qquad (2\pi,\ 3).$$

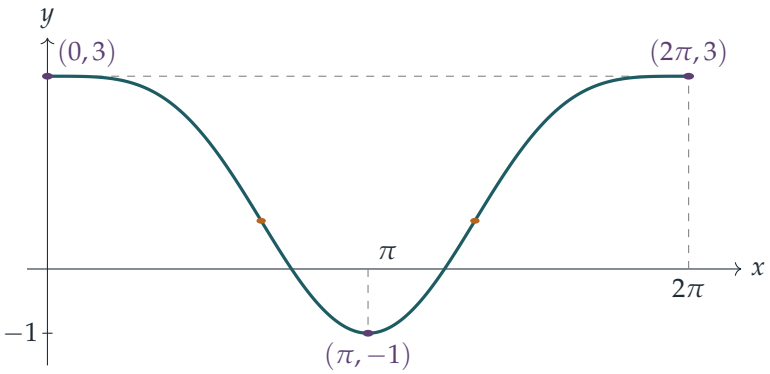
である。$(0, \pi)$ では $\sin x > 0$ かつ $\cos x - 1 < 0$ であるから、$\mathrm{f}' < 0$ となり f は減少する。$(\pi, 2\pi)$ では $\sin x < 0$ であり、$\cos x - 1$ は依然として負であるから、$\mathrm{f}' > 0$ となり f は増加する。よって $(\pi, -1)$ は極小点であり、端点 $(0, 3)$ と $(2\pi, 3)$ は最大点である。

考えてみよう $x=0$ の近くで曲線はどのような形をしているか。放物線のようになっているだろうか。

そうではなく、放物線よりも平らである。$x=0$ の近くでは $1-\cos x \approx \frac{1}{2}x^2$ であるから、$\mathrm{f}(x) \approx 3-\frac{1}{4}x^4$ となる。曲線は頂上で非常に平らであり、これは $\mathrm{f}''(0)=0$ であることと整合する。$x=\pi$ の近くでは $x=\pi+t$ とおく。すると $1-\cos x = 1+\cos t \approx 2-\frac{1}{2}t^2$ であるから、$\mathrm{f} \approx -1+2t^2$ となる。これは通常の放物線的な極小である。

概形を描くのに役立つその他の特徴：

- $\cos(2\pi-x)=\cos x$ であるから、曲線は $x=\pi$ に関して対称である。
- 曲線は $(1-\cos x)^2=3$、すなわち $\cos x = 1-\sqrt{3}$ となるところで x 軸と交わる。これより $x=\arccos(1-\sqrt{3}) \approx 2.39$ および $x=2\pi-\arccos(1-\sqrt{3}) \approx 3.89$ を得る。
- $\mathrm{f}''(x)=2\cos 2x-2\cos x=2(2\cos x+1)(\cos x-1)$ である。これは $\cos x=-\frac{1}{2}$ となるところで符号を変えるので、変曲点（point of inflection）は $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{3}{4}\right)$ と $\left(\frac{4\pi}{3},\frac{3}{4}\right)$ である。



琥珀色の点は変曲点である。

g の停留点

商の微分法により、$c\,\mathrm{f}(x)+d \neq 0$ となるところではどこでも

$$\mathrm{g}'(x)=\frac{a\mathrm{f}'(x)\big(c\mathrm{f}(x)+d\big)-c\mathrm{f}'(x)\big(a\mathrm{f}(x)+b\big)}{\big(c\mathrm{f}(x)+d\big)^2}=\frac{(ad-bc)\,\mathrm{f}'(x)}{\big(c\mathrm{f}(x)+d\big)^2}.$$

$ad \neq bc$ であるから、g が定義されるすべての点において、$\mathrm{g}'(x)=0$ となるのは $\mathrm{f}'(x)=0$ となるときに限る。よって g は f の停留点以外に停留点をもたない。

さらに g が $x=0,\pi,2\pi$ で定義されていることを確かめる必要があり、ここで残りの 2 つの条件が効いてくる。$x=0$ および $x=2\pi$ では分母は $3c+d$ であり、$d \neq -3c$ であ

るからこれは o でない。$x=\pi$ では分母は $d-c$ であり、$d\neq c$ であるからこれは o でない。したがって、求めるとおり $y=\mathrm{g}(x)$ の停留点はちょうど $x=0,\ \pi,\ 2\pi$ にあり、

$$\mathrm{g}(0)=\mathrm{g}(2\pi)=\frac{3a+b}{3c+d},\qquad \mathrm{g}(\pi)=\frac{b-a}{d-c}.$$

である。

|g| が有界となるとき

$d/c<-3$ または $d/c>1$ と仮定する。特に $c\neq 0$ であるから、

$$c\,\mathrm{f}(x)+d=c\left(\mathrm{f}(x)+\frac{d}{c}\right).$$

と書ける。$\mathrm{f}(x)$ は $[-1,3]$ の値をとるので、括弧の中は $\left[\frac{d}{c}-1,\ \frac{d}{c}+3\right]$ に属する。

- $d/c>1$ ならば、括弧の中は $\frac{d}{c}-1>0$ 以上である。
- $d/c<-3$ ならば、括弧の中は $\frac{d}{c}+3<0$ 以下である。

いずれの場合も、すべての x に対して $\left|c\,\mathrm{f}(x)+d\right|\geq|c|\,k$ となる定数 $k>0$ が存在する。言葉で言えば、分母は o から離れたままである。分子は $|a\mathrm{f}(x)+b|\leq 3|a|+|b|$ であるから有界（bounded）である。したがって、$[0,2\pi]$ に属するすべての x に対して

$$|\mathrm{g}(x)|\leq\frac{3|a|+|b|}{|c|\,k}$$

が成り立ち、$|\mathrm{g}(x)|$ がいくらでも大きくなることはない。

考えてみよう $-3<d/c<1$ のときは何がうまくいかないのか。

このとき $-d/c$ は -1 と 3 の間に（端点を除いて）ある。f は連続（continuous）で $[-1,3]$ のすべての値をとるので、$\mathrm{f}(x)=-d/c$ となる x が存在し、そこで分母は o になる。同じ点で分子は o にならない。もし両方が o になるとすれば $a(-d/c)+b=0$、すなわち $ad=bc$ となってしまうからである。よって g は垂直漸近線（vertical asymptote）をもち、|g| は有界でない。これにより、最後の小問の条件がまさに過不足のないものであることがわかる。

検算

- 数値的に、$[0,2\pi]$ 上の細かい格子点で f を調べると、最小値は -1、最大値は 3 である。また $3-\mathrm{f}(0.1)\approx 2.496\times10^{-5}$ であり、$\frac{1}{4}(0.1)^4=2.5\times10^{-5}$ と比べると、$x=0$ における 4 次の平らさが確かめられる。

- 特別な場合として、$a = 1$、$b = 0$、$c = 0$、$d = 1$ とすると $\mathrm{g} = \mathrm{f}$ となり、公式から $\mathrm{g}(0) = 3$ および $\mathrm{g}(\pi) = -1$ が得られ、期待どおりである。
- ランダムな a, b, c, d に対して、g の差分（finite difference）による導関数は $(ad - bc)\mathrm{f}'/(c\mathrm{f} + d)^2$ と一致する。

よくある間違い

- 端点 $x = 0$ と $x = 2\pi$ を停留点として見落とすこと。そこでは f' は確かに o である。
- f の停留点で g が定義されていることの確認を忘れること。条件 $d \neq -3c$ と $d \neq c$ はまさにそのためにある。
- $x = 0$ での頂上を、尖った放物線状に描いてしまうこと。曲線はそこではずっと平らである。

STEP のその先へ

$ad \neq bc$ のときの写像 $t \mapsto \dfrac{at + b}{ct + d}$ は**メビウス変換**（Möbius transformation）である。これは逆写像をもち、その導関数 $(ad - bc)/(ct + d)^2$ は決して o にならない。これが、この写像と合成（composition）しても停留点が生じたり消えたりしない理由である。メビウス変換は複素解析（complex analysis）と幾何学において中心的な役割を果たし、合成に関して群（group）をなす。図を中心にした美しい解説としては、Needham, *Visual Complex Analysis*（図で見る複素解析）を参照のこと。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。