解答例

STEP II 1998、第 9 問

力学 ・ 骨組構造の静力学

> **STEP II 1998、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s2-q9

鍵となる考え方

骨組み（framework）は軽いので、これにはたらく外力は 2 つだけである。すなわち A における支持力と C における重力である。釣り合い（equilibrium）にある 2 力は、大きさが等しく、向きが反対で、同一直線上になければならない。このことから、支持力も六角形のぶら下がり方も決まる。その後は節点法（method of joints）を用いる。2 本の棒だけが集まる節点（joint）から始めて力を分解（resolve）し、未知の力が高々 2 つであるような節点へと常に移りながら、六角形を一つずつ節点をたどって回っていく。

解答

支持力

六角形の辺と 3 本の対角線の棒を、6 つの頂点でなめらかにピン結合された（smoothly pinned）軽い棒（light rod）としてモデル化し、1 kg の質点の重さを W と書く。したがって $W = g \approx 9.8\,\mathrm{N}$ である。棒は軽いので、骨組み全体にはたらく外力は、A における支点からの力 $\mathbf{R}$ と、C において鉛直下向きにはたらく重さ W だけである。

> ? **考えてみよう** 骨組みは好きな角度でぶら下がることができるだろうか？

できない。骨組み全体について、力の和は 0 でなければならず、力のモーメント（moment）の総和も 0 でなければならない。A のまわりのモーメントを考えると、支持力のモーメントは 0 なので、C における重さの A のまわりのモーメントも 0 でなければならない。これが起こるのは C が A の真下にあるときに限る。よって骨組みは短

い対角線 AC が鉛直になるようにぶら下がり、力を分解すると

$$\mathbf{R} = W \text{ 鉛直上向き}, \qquad |\mathbf{R}| = g \approx 9.8\,\mathrm{N},$$

となる。これは CA に沿ってはたらく 1 kg の重さである。

棒にはたらく力

辺の長さを 1 とする（力はこれに依存しない）。AC が鉛直のとき、B は AC の高さの中央にあってその片側にあり、六角形の残りの部分は反対側にある。すなわち F は A と同じ高さ、E は B と同じ高さ、D は C と同じ高さにある。よって AF、BE、CD は水平であり、辺 AB、BC、DE、EF は水平と 60° をなし、短い対角線 BD、BF は水平と 30° をなす。

棒 XY の張力（tension）を T_{XY} とする。張力はそれぞれの端で、節点を棒のもう一方の端の方へ引く。張力が負であることは、その棒が圧縮力（thrust）を受けていることを意味する。

> **考えてみよう** 棒にはたらく未知の力は 9 つある。どこから始めればよいだろうか？

2 本の棒だけが集まる節点から始める。そうすれば 2 つの式（水平方向と鉛直方向）をただちに解くことができるからである。節点 C には CB と CD しかなく、しかも荷重がかかっている。

節点 C。棒 CB は水平から 60° 上向きを向き、CD は水平で、B の側とは反対を向く。力を分解すると、

$$\begin{aligned} &\text{鉛直方向：} \quad T_{BC}\sin 60^\circ = W \;\Rightarrow\; T_{BC} = \tfrac{2W}{\sqrt{3}}, \\ &\text{水平方向：} \quad T_{CD} = T_{BC}\cos 60^\circ = \tfrac{W}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

節点 D。ここでの未知数は DE と DB だけである。D から見ると、棒 DC は水平に B の側を向き、DE は水平から 60° 上向きで B の側とは反対を向き、DB は水平から 30° 上向きで B の側を向く。力を分解すると、

$$\begin{aligned} &\text{鉛直方向：} \quad T_{DE}\sin 60^\circ + T_{BD}\sin 30^\circ = 0 \;\Rightarrow\; T_{BD} = -\sqrt{3}\,T_{DE}, \\ &\text{水平方向：} \quad T_{CD} - T_{DE}\cos 60^\circ + T_{BD}\cos 30^\circ = 0 \;\Rightarrow\; T_{CD} - \tfrac{1}{2}T_{DE} - \tfrac{3}{2}T_{DE} = 0, \end{aligned}$$

よって $T_{DE} = \frac{1}{2}T_{CD} = \frac{W}{2\sqrt{3}}$、$T_{BD} = -\frac{W}{2}$ である。

節点 E。棒 ED は水平から 60° 下向き、EF は水平から 60° 上向きを向き、EB は水平であって、いずれも B の側を向く。鉛直方向に分解すると $T_{EF} = T_{DE} = \frac{W}{2\sqrt{3}}$ を得る。

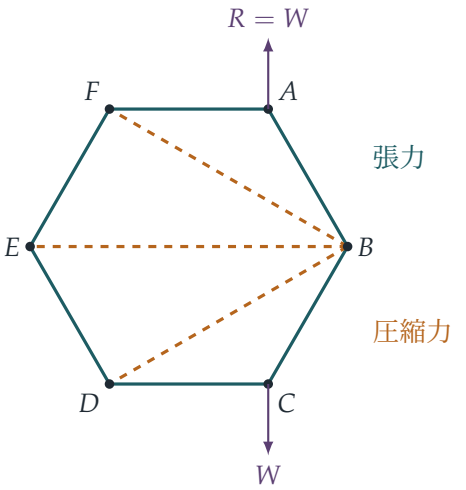
水平方向に分解すると、

$$\tfrac{1}{2}T_{DE} + \tfrac{1}{2}T_{EF} + T_{BE} = 0 \;\Rightarrow\; T_{BE} = -\tfrac{W}{2\sqrt{3}}.$$

節点 F。これは節点 D を直線 BE に関して折り返した鏡像である。鉛直方向に分解すると $T_{BF} = -\sqrt{3}\,T_{EF} = -\frac{W}{2}$、水平方向に分解すると $T_{FA} = 2T_{EF} = \frac{W}{\sqrt{3}}$ である。

節点 A。水平方向について $T_{AB}\cos 60^\circ = T_{FA}$ であるから $T_{AB} = \frac{2W}{\sqrt{3}}$ である。鉛直方向について $R = T_{AB}\sin 60^\circ = W$ であり、最初の小問の結果と一致する。

節点 B からはさらに 2 つの式が得られるが、これらは自動的に成り立つ。骨組み全体がすでに釣り合っているからである。これらを確かめることは、計算の良い検証になる。



まとめると、$W = g$ として次のようになる。

- 6 本の辺はすべて張力を受ける：AB と BC は $\frac{2W}{\sqrt{3}}$、CD と FA は $\frac{W}{\sqrt{3}}$、DE と EF は $\frac{W}{2\sqrt{3}}$ である。
- 内側の 3 本の棒はすべて圧縮力を受ける：BD と BF は $\frac{W}{2}$、BE は $\frac{W}{2\sqrt{3}}$ である。

よって BE にはたらく力は大きさ

$$\frac{g}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\,g}{6} \approx 2.83\ \mathrm{N}$$

の圧縮力である。

検算

- 対称性：直線 BE に関して折り返すと $A \leftrightarrow C$、$F \leftrightarrow D$ が入れ替わり、A における上向きの力 W は C における下向きの力 W に移る。よって荷重のかかり方は対称であり、答えも対称になるはずである：$T_{AB} = T_{BC}$、$T_{FA} = T_{CD}$、$T_{EF} = T_{DE}$、$T_{BF} = T_{BD}$。実際そうなっている。
- 節点 B：水平方向について、2 本の辺は一方の向きに $2 \cdot \frac{2W}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2}$ を与え、BD、BF、BE は反対の向きに $2 \cdot \frac{W}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{W}{2\sqrt{3}} = \frac{2W}{\sqrt{3}}$ を与える。鉛直方向については、AB と BC が打ち消し合い、BD と BF も打ち消し合う。
- $g = 9.8$ として 12 個の節点の式すべてを数値的に解いた。これらは矛盾なく、$R = 9.8\,\mathrm{N}$ 上向きと、圧縮力 $|T_{BE}| \approx 2.829\,\mathrm{N}$ を与え、AC を傾けると解をもたない。

よくある間違い

- 辺や長い対角線が鉛直になるように六角形を描いてしまう。ぶら下がる位置は一意に決まる：C は A の真下にある。
- 節点ごとに符号の約束を取り違える。「張力は節点を棒のもう一方の端の方へ引く」と一度決めておき、どの棒が圧縮力を受けているかは負の答えに教えてもらえばよい。

STEP のその先へ

節点が j 個の骨組みは、棒がちょうど $2j - 3$ 本のとき、剛（rigid）かつ静定（statically determinate）である。ここでは $2 \cdot 6 - 3 = 9$ であり、これが静力学だけで力を求められる理由である。棒がそれより多いと構造は「不静定」（redundant）となり、棒の弾性（elasticity）を考える必要がある。これが構造力学（structural mechanics）の出発点であり、グラフの剛性（rigidity of graphs）の数学の出発点でもある。背景にあるベクトルによる力学については、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を読んでみるとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。