解答例

STEP II 1998、第 8 問

純粋数学 ・ ベクトルと図形

> **STEP II 1998、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s2-q8

鍵となる考え方

ここでの議論はすべて、各直線を「点 + 媒介変数（parameter）× 方向」の形に書き、その媒介変数をうまく選ぶことに尽きる。式は $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ について対称であるから、ある媒介変数の値で 3 つのベクトルについて対称な答えが得られれば、その同じ点が 3 本の直線すべての上にある。「見ればわかる」という問題文の言い回しが探すよう促しているのは、まさにこのことである。

解答

中線は R で交わる

BC の中点の位置ベクトル（position vector）は $\frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ であるから、A からこの点へ向かう直線は

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + s\left(\tfrac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) - \mathbf{a}\right) = (1-s)\mathbf{a} + \tfrac{s}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}).$$

である。結果が対称になるよう、3 つの係数を等しくしたい。$1-s = \frac{s}{2}$ より $s = \frac{2}{3}$ であり、その点は

$$\mathbf{r} = \tfrac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}).$$

である。B からの直線と C からの直線は $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ を巡回的に入れ替えれば得られ、同じく $s = \frac{2}{3}$ と選べば、それぞれの直線上で同じ対称な点が得られる。よって 3 本の直線はすべて、位置ベクトルが

$$\mathbf{r}_R = \tfrac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}),$$

である点 R を通る。これは三角形の重心（centroid）である。（A, B, C は本物の三角形をなすので、これらの直線のうちどの 2 本も一致せず、したがって R はそれらのただ

1 つの共有点である。）

3 本の平行線は Q で交わる

P の位置ベクトルを $\mathbf{p}$ とする。3 本の直線は次のとおりである。

$$\begin{aligned}
&\text{辺}BC\text{ の中点を通り、方向が}PA: \quad \mathbf{r} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) + \lambda(\mathbf{a}-\mathbf{p}),\\
&\text{辺}CA\text{ の中点を通り、方向が}PB: \quad \mathbf{r} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{c}+\mathbf{a}) + \mu(\mathbf{b}-\mathbf{p}),\\
&\text{辺}AB\text{ の中点を通り、方向が}PC: \quad \mathbf{r} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) + \nu(\mathbf{c}-\mathbf{p}).
\end{aligned}$$

考えてみよう λ をどんな値にすれば、1 つ目の式は $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ について対称になるか。

1 つ目の直線では、$\mathbf{b}$ と $\mathbf{c}$ の係数はどちらも $\frac{1}{2}$ であり、$\mathbf{a}$ の係数は λ である。これらをそろえるには $\lambda = \frac{1}{2}$ とすればよい。このとき

$$\mathbf{r} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{p}).$$

となる。残りの 2 本の直線で $\mu = \frac{1}{2}, \nu = \frac{1}{2}$ とすると、まったく同じベクトルが得られる。したがって 3 本の直線はすべて、

$$\mathbf{q} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{p}).$$

で定まる点 Q を通る。

PQ は平面 ABC と R で交わる

まず $Q \neq P$ である。実際、$\mathbf{q} = \mathbf{p}$ ならば $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = 3\mathbf{p}$ となるので $\mathbf{p} = \mathbf{r}_R$ であり、P は点 R に一致してしまうが、この点は平面 ABC 上にある。よって PQ は本物の直線であり、

$$\mathbf{r} = \mathbf{p} + t(\mathbf{q}-\mathbf{p}) = \mathbf{p} + t\left(\tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) - \tfrac{3}{2}\mathbf{p}\right).$$

と表される。$\mathbf{p}$ の項を消すには $1 - \frac{3}{2}t = 0$、すなわち $t = \frac{2}{3}$ とすればよく、このとき

$$\mathbf{r} = \mathbf{p} + \tfrac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) - \mathbf{p} = \tfrac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{r}_R.$$

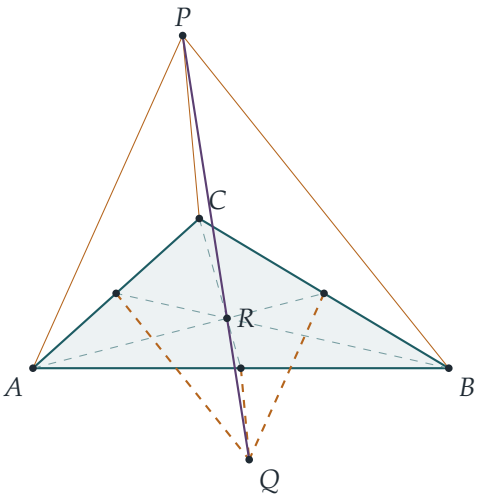
となる。よって R は直線 PQ 上にある。また R は平面 ABC 上にもある（R は A からの中線（median）上にあり、その中線はこの平面内にある）。

考えてみよう PQ が平面と別の場所でも交わることはありうるか。

ありえない。直線と平面は、共有点をもたないか、ちょうど 1 点で交わるか、直線が平面に完全に含まれるかのいずれかである。直線 PQ は平面 ABC に含まれない。な

ぜなら P はこの直線上にあり、しかも P は平面上にないからである。よって直線は平面と高々 1 点で交わり、その点が R である。以上で、PQ が平面 ABC と R で交わることが証明された。

おまけとして、$t = \frac{2}{3}$ から、R は PQ を $PR : RQ = 2 : 1$ の比に内分することがわかる。同じことであるが、$\mathbf{q} - \mathbf{r}_R = -\frac{1}{2}(\mathbf{p} - \mathbf{r}_R)$ が成り立つ。



検算

- 主張した交点はどれも、代入し直して確かめられる。たとえば $\mathbf{q} - \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{p})$ であり、これは明らかに PA に平行である。
- $A = (0,0,0)$, $B = (3,0,0)$, $C = (0,3,0)$, $P = (0,0,3)$ とすると、$R = (1,1,0)$, $Q = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$ が得られる。P から Q へ 3 分の 2 進んだ点は $(1,1,0) = R$ であり、平面 $z = 0$ 上にある。
- さらに、A, B, C, P を無作為に 2000 通り選び、有理数の厳密な計算ですべての結果を確かめた。直線 PQ は常に平面 ABC と R で交わり、そのときの媒介変数は $t = \frac{2}{3}$ であった。

よくある間違い

- 方程式を解いて 2 本の直線上にある点を求め、それが 3 本目の直線上にあることを確かめ忘れる。
- R が PQ 上にあることは示しても、それがなぜ PQ と平面が交わる**唯一の**点なのか

を説明しない。P が平面上にないという条件が使われるのは、まさにここである。

STEP のその先へ

この結果の背後には、きれいな幾何学的理由がある。中心 R、拡大率 $-\frac{1}{2}$ の拡大（enlargement）（写像 $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{r}_R - \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{r}_R)$）は、$A, B, C$ をそれぞれ BC, CA, AB の中点に移し、任意の直線をそれに平行な直線に移す。したがってこの拡大は、P で交わる直線 PA, PB, PC を 3 本の新しい直線に移すので、新しい直線は P の像で交わらなければならない。その像が Q であり、拡大の中心は任意の点とその像と同一直線上にある（共線（collinear）である）から、P, R, Q は同一直線上にある。幾何学を変換（アフィン写像（affine map）とその不動点（fixed point））を通して考えることは、大学 1 年の線形代数（linear algebra）の中心的な考え方である。この考え方がどう展開されるかを見るには、ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）がよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。