解答例

STEP II 1998、第 7 問

純粋数学 • 導関数による不等式

> **STEP II 1998、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s2-q7

鍵となる考え方

どの不等式も同じ方法で証明できる。関数が $x = 0$ で 0 となり、その導関数（derivative）が正であるから、関数は 0 から増加していく。面白いのは、これらの関数が連鎖している点である。g の導関数には f が現れ、h の導関数は g に $2x$ を代入したものになる。したがって、各小問が次の小問で必要となる「導関数が正」という事実を与えてくれる。小問 (iv) では、対数（logarithm）をとることで商 F が和に変わり、F'/F の符号は小問 (iii) の式の符号に帰着する。

解答

全体を通して用いる道具は次のとおりである。ϕ が微分可能で、$\phi(0) = 0$ かつ $0 < x < a$ において $\phi'(x) > 0$ ならば、ϕ は $[0, a)$ で狭義単調増加（strictly increasing）であり、したがって $0 < x < a$ において $\phi(x) > \phi(0) = 0$ が成り立つ。（平均値の定理（mean value theorem）より、ある $c \in (0, x)$ に対して $\phi(x) = \phi(x) - \phi(0) = x\phi'(c)$ となり、これは正である。）

小問 (i)

$\mathrm{f}(0) = \tan 0 - 0 = 0$ であり、

$$\mathrm{f}'(x) = \sec^2 x - 1 = \tan^2 x.$$

$0 < x < \frac{1}{2}\pi$ では $\tan x$ は定義されて正であるから、$\mathrm{f}'(x) > 0$ である。よって $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ において $\mathrm{f}(x) > 0$、すなわちこの範囲で $\tan x > x$ が成り立つ。

小問 (ii)

ここでも $g(0) = 2 - 2 - 0 = 0$ である。$x \sin x$ に積の微分法（product rule）を用いて微分すると、

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2\sin x - (\sin x + x\cos x) \\ &= \sin x - x\cos x \\ &= \cos x\,(\tan x - x) = \cos x\, f(x). \end{aligned}$$

$0 < x < \frac{1}{2}\pi$ では $\cos x > 0$ であり、小問 (i) より $f(x) > 0$ である。よって $g'(x) > 0$ であり、$g(0) = 0$ であるから、$0 < x < \frac{1}{2}\pi$ において $g(x) > 0$ が従う。

小問 (iii)

再び $h(0) = 0$ である。微分すると、

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2 + \cos 2x - 2x\sin 2x - 3\cos 2x \\ &= 2 - 2\cos 2x - 2x\sin 2x. \end{aligned}$$

考えてみよう この式は以前に見たことがないだろうか？

これは g の x を $2x$ に置き換えたものである：

$$h'(x) = 2 - 2\cos(2x) - (2x)\sin(2x) = g(2x).$$

$0 < x < \frac{1}{4}\pi$ ならば $0 < 2x < \frac{1}{2}\pi$ であるから、小問 (ii) より $g(2x) > 0$ である。範囲が $\frac{1}{2}\pi$ ではなく $\frac{1}{4}\pi$ になっているのはこのためである。よって $0 < x < \frac{1}{4}\pi$ において $h'(x) > 0$ であり、$h(0) = 0$ と合わせて、$0 < x < \frac{1}{4}\pi$ において $h(x) > 0$ が得られる。

問題文の「hence（これを用いて）」の部分については、与えられた式を 2 倍角の公式（double-angle formulae）で書き直す。$\sin^2 x + 3\cos^2 x = 1 + 2\cos^2 x = 2 + \cos 2x$ および $3\sin x\cos x = \frac{3}{2}\sin 2x$ であるから、

$$\begin{aligned} x(\sin^2 x + 3\cos^2 x) - 3\sin x\cos x &= x(2 + \cos 2x) - \tfrac{3}{2}\sin 2x \\ &= 2x + x\cos 2x - \tfrac{3}{2}\sin 2x = h(x). \end{aligned}$$

したがってこの式はちょうど $h(x)$ に等しく、$0 < x < \frac{1}{4}\pi$ において正である。以上で示された。

小問 (iv)

$0 < x < \frac{1}{4}\pi$ では x、$\sin x$、$\cos x$ はいずれも正であるから、$F(x) > 0$ であり、対数をとることができる：

$$\ln F(x) = \ln x + \tfrac{1}{3}\ln\cos x - \ln\sin x.$$

両辺を x で微分すると、

$$\frac{\mathrm{F}'(x)}{\mathrm{F}(x)} = \frac{1}{x} - \frac{\sin x}{3\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}.$$

考えてみよう この式の符号はどうすればわかるだろうか？

この区間で正である共通の分母 $3x\sin x\cos x$ で通分する：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{F}'(x)}{\mathrm{F}(x)} &= \frac{3\sin x\cos x - x\sin^2 x - 3x\cos^2 x}{3x\sin x\cos x} \\ &= -\frac{x(\sin^2 x + 3\cos^2 x) - 3\sin x\cos x}{3x\sin x\cos x} = -\frac{\mathrm{h}(x)}{3x\sin x\cos x}.\end{aligned}$$

小問 (iii) より分子 $\mathrm{h}(x)$ は正であり、分母も正であるから、$\mathrm{F}'(x)/\mathrm{F}(x) < 0$ である。$\mathrm{F}(x) > 0$ であるから、両辺に掛けて $0 < x < \frac{1}{4}\pi$ において $\mathrm{F}'(x) < 0$ が得られる。以上で示された。

検算

- いくつかの値：$\mathrm{F}(0.1) \approx 0.999998$、$\mathrm{F}(0.5) \approx 0.99849$、$\mathrm{F}(\frac{1}{4}\pi) \approx 0.98954$ であり、F は減少しているが、その減少はゆるやかである。
- 0 の近くでは、これらの不等式は非常にきわどい。マクローリン展開（Maclaurin series）すると $\mathrm{h}(x) = \frac{4}{15}x^5 + \cdots$ となり、x の項と x^3 の項は打ち消し合う。$\mathrm{h} > 0$ が単純に「見てとれる」わけではなく、導関数の連鎖が必要になるのはこのためである。数値的には $\mathrm{h}(0.01)/0.01^5 \approx 0.26666$ である。
- 4 つの不等式すべてと、恒等式 $\mathrm{g}' = \mathrm{f}\cos x$、$\mathrm{h}'(x) = \mathrm{g}(2x)$、$\mathrm{F}'/\mathrm{F} = -\mathrm{h}/(3x\sin x\cos x)$ を、ランダムに選んだ 20 000 点で確かめた。

よくある間違い

- $\mathrm{f}'(x) \geq 0$ であることしか論じない、あるいは $\mathrm{f}(0) = 0$ を述べ忘れる。0 から始まることと、導関数が狭義に正であることの両方が必要である。
- 小問 (iii) で小問 (ii) を使う際に、$2x$ が $(0, \frac{1}{2}\pi)$ に属することを確認しない。制限 $x < \frac{1}{4}\pi$ が生じるのはまさにこの点からである。
- $\mathrm{F} > 0$ であることに触れずに、$\mathrm{F}'/\mathrm{F} < 0$ から $\mathrm{F}' < 0$ を結論する。

STEP のその先へ

「出発点で 0、導関数が正ならば正」という原理は、大学の解析学（analysis）の講義で最初に出会う大定理の一つである平均値の定理から導かれる。ここでのようにこれを繰り返し用いるのは、$\sin x > x - \frac{1}{6}x^3$ のような不等式（inequality）を証明する標準的な方法であり、剰余項付きテイラーの定理（Taylor's theorem with remainder）と密接に関係している。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、平均値の定理とその応用を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。