解答例

STEP II 1998、第 6 問

純粋数学 ・ サイクロイドと法線

> **STEP II 1998、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s2-q6

鍵となる考え方

2 つの曲線はどちらもサイクロイド（cycloid）、すなわち転がる円の周上の 1 点が描く軌跡である。半角の公式（half-angle formulae）$1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$、$1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$、$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ を使えば、これらに関するあらゆる計算が簡単になる。傾き（gradient）は $\frac{\theta}{2}$ の tan または cot ひとつにまとまり、法線（normal）の方程式もすっきりとした 1 本の直線の式に縮まる。直線が曲線 (2) の接線（tangent）であることを示すには、その直線上にあり、かつそこでの曲線の傾きが直線の傾きと等しくなるような (2) 上の点を見つければよい。

（問題文の 2 つ目の曲線では y_2 とすべきところが y_1 となっているが、これは誤植である。）

解答

傾き

曲線 (1) について、$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\theta} = 1+\cos\theta$、$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta$ であるから、

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x_1} = \frac{-\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = -\tan\frac{\theta}{2},$$

となる。これは $\cos\frac{\theta}{2} \neq 0$、すなわち $\theta \neq \pi$ であるところで成り立つ。

曲線 (2) について、$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}\theta} = 1-\cos\theta$、$\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}\theta} = \sin\theta$ であるから、

$$\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x_2} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} = \cot\frac{\theta}{2},$$

となる。これは $\theta \neq 0, 2\pi$ で成り立つ。

$\theta = \pi/2$ のとき $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4}$ であり、曲線 (1) の傾きは -1、曲線 (2) の傾きは 1 である。

$\theta = 3\pi/2$ のとき $\frac{\theta}{2} = \frac{3\pi}{4}$ であり、そこでは $\tan = -1$、$\cot = -1$ である。よって曲線 (1) の傾きは 1、曲線 (2) の傾きは -1 である。

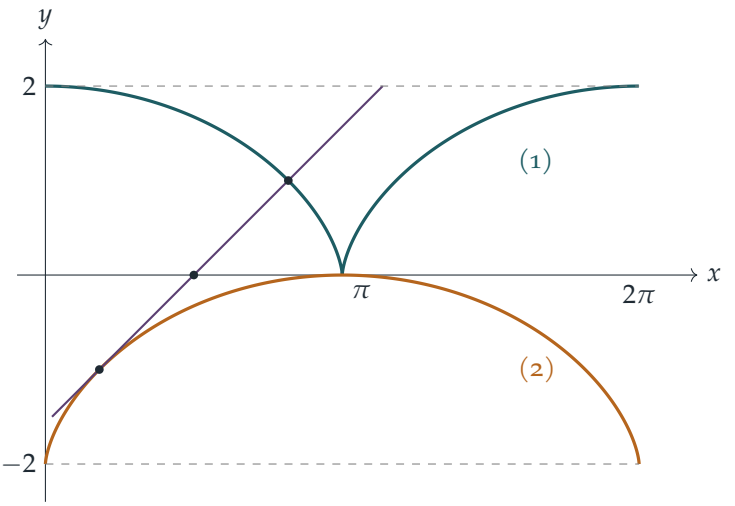
概形

x_1 と x_2 はどちらも θ について単調非減少である（導関数 $1 \pm \cos\theta$ は決して負にならない）。したがって、どちらの曲線も $x = 0$ から $x = 2\pi$ まで左から右へ進む。

曲線 (1) は傾き 0 で $(0, 2)$ から出発し、$(\pi, 0)$ まで下がったのち、対称的に $(2\pi, 2)$ まで上がる。$\theta = \pi$ では両方の導関数が 0 になり、$|\mathrm{d}y_1/\mathrm{d}x_1| = |\tan\frac{\theta}{2}| \to \infty$ となるので、$(\pi, 0)$ に鉛直な接線をもつ尖点（cusp）がある。$0 \leq y_1 \leq 2$ であるから、この曲線は $y = 0$ と $y = 2$ の間にある。

曲線 (2) は $(0, -2)$ に尖点をもち（$\cot\frac{\theta}{2} \to \infty$ より接線は鉛直）、傾きが $\cot\frac{\pi}{2} = 0$ となる $(\pi, 0)$ まで上がったのち、尖点 $(2\pi, -2)$ まで下がる。これは直線 $y = -2$ の上に立つ通常のサイクロイドの 1 つのアーチである。

2 つの曲線は $(\pi, 0)$ で接する。曲線 (1) はそこへ鉛直に到達し、曲線 (2) はそこを水平に通過する。$\theta \mapsto 2\pi - \theta$ は $x \mapsto 2\pi - x$ を引き起こし、どちらの曲線でも y を変えないので、図は $x = \pi$ に関して対称である。紫色の直線は $\theta = \pi/2$ における (1) の法線であり、これについては後で扱う。



曲線 (1) の法線

(1) の接線の傾きは $-\tan\frac{\theta}{2}$ であるから、法線の傾きは $\cot\frac{\theta}{2}$ である（$\theta \neq 0, \pi, 2\pi$ のとき。これらの場合は後で扱う）。点 $(\theta+\sin\theta,\ 1+\cos\theta)$ における法線は

$$y-(1+\cos\theta)=\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}(x-\theta-\sin\theta).$$

である。両辺に $\sin\frac{\theta}{2}$ を掛け、半角の形を用いると

$$y\sin\tfrac{\theta}{2}-2\cos^2\tfrac{\theta}{2}\sin\tfrac{\theta}{2}=(x-\theta)\cos\tfrac{\theta}{2}-2\sin\tfrac{\theta}{2}\cos^2\tfrac{\theta}{2}.$$

となる。両辺の最後の項は等しいので打ち消し合い、

$$\boxed{y\sin\tfrac{\theta}{2}=(x-\theta)\cos\tfrac{\theta}{2}}$$

が法線の方程式として残る。

この形は例外的な値も含んでいる。$\theta=0$ のときは $x=0$ となり、これは $(0,2)$ を通る鉛直な直線である。そこでの接線は水平なので、これは正しい。$\theta=2\pi$ のときも同様に $x=2\pi$ となる。$\theta=\pi$ のときは $y=0$ となり、これは尖点を通る水平な直線で、尖点における鉛直な接線に垂直である。

法線がつねに x 軸上の点 $(\theta,0)$ を通ることに注意しよう。これは転がる円が、その上を転がる直線と接する点であり、サイクロイドのよく知られた性質である。

法線は曲線 (2) の接線である

考えてみよう 法線は曲線 (2) のどの点で接するはずだろうか。

パラメータ ϕ における (2) の接線の傾きは $\cot\frac{\phi}{2}$ であり、法線の傾きは $\cot\frac{\theta}{2}$ である。cot は $(0,\pi)$ 上で単射（one-to-one）であるから、$(0,2\pi)$ 内の ϕ,θ に対して両者が一致するのは $\phi=\theta$ のときに限る。したがって候補となるのは、同じパラメータ θ をもつ (2) 上の点だけである。

その点は $(x_2,y_2)=(\theta-\sin\theta,\ -(1+\cos\theta))$ である。これを法線の方程式に代入すると

$$\begin{aligned}\text{左辺}&=y_2\sin\tfrac{\theta}{2}=-2\cos^2\tfrac{\theta}{2}\sin\tfrac{\theta}{2},\\ \text{右辺}&=(x_2-\theta)\cos\tfrac{\theta}{2}=-\sin\theta\cos\tfrac{\theta}{2}=-2\sin\tfrac{\theta}{2}\cos^2\tfrac{\theta}{2}.\end{aligned}$$

となる。両者は等しいので、θ における (1) の法線は、パラメータ θ をもつ (2) 上の点を通る。その点における (2) の傾きは $\cot\frac{\theta}{2}$ であり、法線の傾きと同じである。曲線上

の点を通り、そこでの曲線の傾きをもつ直線はその点における接線であるから、(1) の法線は (2) の接線である。これが示すべきことであった。

特別な値でも成り立つ。$\theta = \pi$ のとき、法線 $y = 0$ は (2) の頂点 $(\pi, 0)$ で (2) に接し、そこでの (2) の傾きは 0 である。$\theta = 0$（または 2π）のとき、法線 $x = 0$（または $x = 2\pi$）は (2) の尖点における鉛直な接線である。

検算

- $\theta = \pi/2$ のとき法線は $y = x - \frac{\pi}{2}$ である。これは (1) 上の点 $(\frac{\pi}{2} + 1, 1)$、点 $(\frac{\pi}{2}, 0)$、そして (2) 上の点 $(\frac{\pi}{2} - 1, -1)$ を通り、最後の点での (2) の傾きは、最初の部分で求めたとおり 1 である。これが概形の図の紫色の直線である。
- 差分（finite differences）による傾きの数値的な検算は、小数第 6 位まで $-1, 1$ および $1, -1$ と一致した。1000 個のランダムな θ の値において、法線は両方の点を通り、(2) の接線と平行であることが 10^{-12} 以内の誤差で確かめられた。

よくある間違い

- 傾きを $-\sin\theta/(1 + \cos\theta)$ のままにして、法線について煩雑な計算を延々と続けてしまう。半角の形を使えば、法線は 2 行の計算で済む。
- 法線が曲線 (2) と交わることだけを示してしまう。交わるだけでは不十分であり、交点で傾きが一致することも必要である。

STEP のその先へ

曲線の曲率中心（centre of curvature）が描く曲線をその曲線の**縮閉線**（evolute）といい、これはその曲線の法線の包絡線（envelope）でもある。この問題は、サイクロイドの縮閉線が、アーチ半分だけずらした合同なサイクロイドであることを示している。(1) から (2) との接点までの法線に沿った距離は $4|\cos\frac{\theta}{2}|$ であり、これはちょうど、その点から頂点までの (2) の弧長（arc length）に等しい。したがって (1) は、(2) から巻きほどかれていく糸の端が描く曲線である。ホイヘンス（Huygens）はこれを利用して、周期が振幅に依存しない振り子を作った。曲率、縮閉線、伸開線（involute）については、Pressley, *Elementary Differential Geometry*（初等微分幾何学）を読んでみるとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。