解答例

STEP II 1998、第 5 問

純粋数学 • 複素数の三角不等式

> **STEP II 1998、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s2-q5

鍵となる考え方

$|z_1 - z_2|$ は複素数平面（Argand diagram）上の 2 点間の距離であるから、$|z_1 + z_2|$ に関する不等式は、三角形の 1 辺の長さは他の 2 辺の長さの和を超えないという主張にすぎない。これを n 項の場合に拡張してしまえば、最後の小問は各項をその絶対値で評価し、等比級数（geometric series）であることに気づけばよい。$|z|$ が小さいと左辺は小さくなりすぎて、決して 1 に届かないのである。

解答

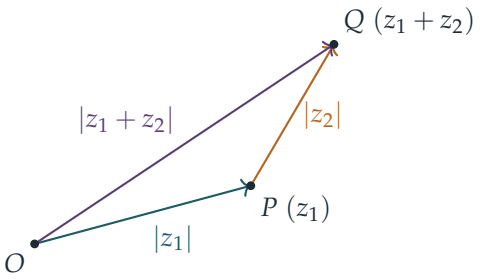
絶対値、距離、三角不等式

x, y を実数として $z = x + \mathrm{i}y$ とすると、z の絶対値（modulus）は

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

であり、これは原点から z を表す点 (x, y) までの距離である。$z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$、$z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ とすると、$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ であり、これは z_1 と z_2 を表す 2 点間の距離である。

ここで、0、z_1、$z_1 + z_2$ を表す点をそれぞれ O、P、Q とする。



上の解釈により、

$$OP = |z_1 - 0| = |z_1|, \qquad PQ = |(z_1+z_2) - z_1| = |z_2|, \qquad OQ = |z_1+z_2|.$$

線分 OQ は O から Q への最短経路であるから、経路 $O \to P \to Q$ より長くはない。すなわち $OQ \le OP + PQ$ であり、等号が成り立つのは P が線分 OQ 上にあるとき（点が一致する退化した場合も含む）に限る。したがって

$$|z_1+z_2| \le |z_1| + |z_2|.$$

n 項の不等式

すべての $n \ge 1$ とすべての複素数 $z_1, \ldots, z_n$ に対して

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \le |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|.$$

が成り立つことを数学的帰納法（induction）で証明する。$n = 1$ のとき、両辺はともに $|z_1|$ に等しい。ある $n = k \ge 1$ で結果が成り立つと仮定する。$z_1, \ldots, z_{k+1}$ が与えられたとき、2 つの複素数 $w = z_1 + \cdots + z_k$ と z_{k+1} に 2 項の不等式を適用すると、

$$\begin{aligned} |z_1 + \cdots + z_k + z_{k+1}| = |w + z_{k+1}| &\le |w| + |z_{k+1}| \\ &\le |z_1| + \cdots + |z_k| + |z_{k+1}|, \end{aligned}$$

となる。ここで最後の段階では帰納法の仮定を用いた。よって結果は $n = k+1$ でも成り立ち、数学的帰納法によりすべての $n \ge 1$ で成り立つ。

最後の小問

$|z| \le \frac{1}{4}$ と仮定し、$r = |z|$ とおくと $0 \le r \le \frac{1}{4}$ である。各項は $|a_k z^k| = |a_k|\,|z|^k \le 3r^k$ を満たすので、n 項の不等式により

$$\begin{aligned} |a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n| &\le |a_1|\, r + |a_2|\, r^2 + \cdots + |a_n|\, r^n \\ &\le 3(r + r^2 + \cdots + r^n). \end{aligned}$$

考えてみよう $3(r+r^2+\cdots+r^n)$ をどのように 1 と比較できる形に変形すればよいか。また、不等式が**狭義**（strict）であることをどのように保証すればよいか。

これは有限の等比級数であり、$r \le \frac{1}{4} < 1$ であるから和の公式が使える。

$$3(r+r^2+\cdots+r^n) = \frac{3r(1-r^n)}{1-r}.$$

$r = 0$ ならばこれは 0 である。$0 < r \le \frac{1}{4}$ ならば $0 < 1-r^n < 1$ であるから

$$\frac{3r(1-r^n)}{1-r} < \frac{3r}{1-r} \le \frac{3\cdot\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = 1,$$

となる。ここで最後の段階が成り立つのは、$\dfrac{3r}{1-r}$ が $[0,1)$ 上で r について増加するからである（分子は増加し、正の分母は減少する）。いずれの場合も

$$|a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n| < 1,$$

であるから、左辺は 1 に等しくなりえない。よって、この方程式は $|z| \le \frac{1}{4}$ の範囲に解をもたない。

検算

- この評価は最良である。すべての $a_k = 3$、$z = \frac{1}{4}$ とすると、左辺は $3\left(\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4^n}\right) = 1-4^{-n}$ となり、例えば $n = 1, 2, 3$ に対して 0.75、0.9375、0.984375 である。いくらでも 1 に近づくが決して到達しない。これが狭義の不等式が重要である理由である。
- $n \le 15$、$|a_k| \le 3$ を満たす a_k、$|z| \le \frac{1}{4}$ を満たす z を 200 000 通り無作為に選んで試したところ、得られた $|a_1 z + \cdots + a_n z^n|$ の最大値は約 0.996 であり、常に 1 を下回った。

よくある間違い

- 無限和の評価 $3r/(1-r) \le 1$ だけを用いると $|\text{左辺}| \le 1$ しか得られず、解の存在を否定できない。有限和（あるいは $r > 0$ のとき $r^n > 0$ であるという事実）によって狭義の不等式が得られる。
- 帰納法において、n 項の不等式は $z_1 + \cdots + z_k$ を **1 つの**複素数とみなして適用しなければならない。それこそがこの段階の要点である。

STEP のその先へ

三角不等式（triangle inequality）は**距離**（metric）を定義する性質であり、$|z_1 - z_2|$ によって $\mathbb{C}$ は距離空間（metric space）となる。解析学における収束（convergence）の議論のほとんどはこれに基づいている。最後の小問は、多項式や冪級数（power series）の零点（zeros）の位置を特定する諸結果の初歩版である。ここでは $f(z) = a_1 z + \cdots + a_n z^n - 1$ は円板 $|z| \leq \frac{1}{4}$ に零点をもたず、これはルーシェ（Rouché）の定理の精神に通じるものである。複素数の幾何については Needham, *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析）を、解析学における距離の考え方については Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を読むとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。