解答例

STEP II 1998、第 4 問

純粋数学 ・ 部分積分

> **STEP II 1998、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s2-q4

鍵となる考え方

厄介な因子 $\operatorname{cosec}(x/2)$ はそのままでは積分できないが、隣り合う二つの被積分関数（integrand）の**差**はずっと扱いやすい。正弦の差の公式から因子 $\sin(x/2)$ が現れ、これが余割（cosecant）をちょうど打ち消すのである。残るのは多項式と余弦の積であり、これは標準的な部分積分（integration by parts）で処理できる。あとは差を足し合わせると途中の項が次々に消え合い（telescope）、手で計算できる初期値まで帰着する。

解答

差 $I_n - I_{n-1}$

$nx + x/2 = (n + \frac{1}{2})x$ であるから、二つの被積分関数の差は

$$\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right)[\sin(n + \tfrac{1}{2})x - \sin(n - \tfrac{1}{2})x] \operatorname{cosec} \tfrac{x}{2}$$

である。和積公式(factor formula)$\sin A - \sin B = 2\cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$ において $\frac{A+B}{2} = nx$、$\frac{A-B}{2} = \frac{x}{2}$ とすると、

$$\sin(n + \tfrac{1}{2})x - \sin(n - \tfrac{1}{2})x = 2\cos nx \, \sin \tfrac{x}{2}.$$

$\sin \frac{x}{2}$ が余割を打ち消すので、

$$I_n - I_{n-1} = 2\int_0^{\pi} \left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) \cos nx \, \mathrm{d}x.$$

考えてみよう $\operatorname{cosec}(x/2)$ が無限大となる $x=0$ において、この打ち消しは正当だろうか？

正当である。$\sin(n+\frac{1}{2})x \big/ \sin\frac{x}{2} \to 2n+1$ であるから、もとの各被積分関数は $x\to 0$ のとき有限の極限をもち、積分はまったく通常のものである。$0<x\le\pi$ では打ち消しは厳密な代数的操作であり、被積分関数を一点 $x=0$ で変えても積分の値は変わらない。

次に $u=\frac{\pi}{2}-x$、$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\cos nx$ として部分積分を行う。このとき $v=\frac{1}{n}\sin nx$ である（$n\ge 1$ なので有効）。

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right)\cos nx\,\mathrm{d}x &= \Big[\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right)\frac{\sin nx}{n}\Big]_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x\\ &= 0+\frac{1}{n}\Big[-\frac{\cos nx}{n}\Big]_0^{\pi}=\frac{1-\cos n\pi}{n^2}=\frac{1-(-1)^n}{n^2},\end{aligned}$$

ここで $\sin 0=\sin n\pi=0$ であるから境界項は消える。したがって

$$I_n-I_{n-1}=\frac{2(1-(-1)^n)}{n^2}=\begin{cases}\dfrac{4}{n^2}, & n\text{ が奇数},\\[2mm] 0, & n\text{ が偶数}.\end{cases}$$

I_n の計算

差を足し合わせるには初期値が必要である。この積分は I_0 も同様に定める。$n=0$ のとき被積分関数は $(\frac{\pi}{2}-x)\sin\frac{x}{2}\operatorname{cosec}\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}-x$ となるので、

$$I_0=\int_0^{\pi}\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{d}x=\Big[\tfrac{\pi}{2}x-\tfrac{1}{2}x^2\Big]_0^{\pi}=0$$

であり、上の差の公式は $n=1$ でも成り立つ（計算で用いたのは $n\ge 1$ だけである）。$1,2,\dots,n$ についての差を足し合わせると、

$$I_n=I_0+\sum_{k=1}^{n}(I_k-I_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}\frac{2(1-(-1)^k)}{k^2}.$$

寄与するのは奇数の k のみで、それぞれ $4/k^2$ を与えるから、

$$\boxed{I_n=4\sum_{\substack{k=1\\ k\text{ は奇数}}}^{n}\frac{1}{k^2}=4\Big(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\Big),}$$

最後の項は n が奇数なら $1/n^2$、n が偶数なら $1/(n-1)^2$ である。同値な表し方として、$m=\lceil n/2\rceil$ とおけば $I_n=4\sum_{r=1}^{m}\frac{1}{(2r-1)^2}$ である。

$n=0$ を用いることに不安があるなら（問題文では n は正の整数とされている）、代わりに I_1 から始めればよい。$\sin\frac{3x}{2}=\sin\frac{x}{2}(1+2\cos x)$ であるから、上の部分積分を

$n=1$ で用いて $I_1=\int_0^{\pi}(\frac{\pi}{2}-x)(1+2\cos x)\,\mathrm{d}x=0+2\cdot 2=4$ を得る。これは公式と一致する。

検算

- $I_1=I_2=4$、$I_3=I_4=4+\frac{4}{9}=\frac{40}{9}\approx 4.4444$ である。もとの積分にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると（$x=0$ では被積分関数の極限値 $\frac{\pi}{2}(2n+1)$ を用いる）、I_3 について $4.444444\ldots$ が得られ、$n\le 12$ のすべてについて和と 10^{-8} の精度で一致する。
- n に対する被積分関数は $\frac{\pi}{2}-x$ と $1+2\cos x+\cdots+2\cos nx$ の積であり、$\frac{\pi}{2}-x$ は $x=\frac{\pi}{2}$ に関して奇関数である。偶数の k に対して（および定数 1 に対して）、$\cos kx$ は $x=\frac{\pi}{2}$ に関して偶関数であるから、積は奇関数となり、$[0,\pi]$ 上で積分すると 0 になる。これが $I_0=0$ となり、偶数の k が何も寄与しない理由である。

よくある間違い

- 正弦の差の公式で符号や因子 2 を誤る。$x=\pi$、$n=1$ のような値で確かめるとよい。
- $(-1)^n$ ではなく $\cos n\pi=1$ と書いてしまう。こうするとすべての差が 0 になってしまう。
- 初期値を忘れる。あるいは、偶数番目の項が消えることに気づかず、答えをすべての k にわたる和として書いてしまう。

STEP のその先へ

関数 $\sin(n+\frac{1}{2})x\big/\sin\frac{x}{2}=1+2\sum_{k=1}^{n}\cos kx$ は**ディリクレ核**（Dirichlet kernel）と呼ばれ、フーリエ級数（Fourier series）の収束（convergence）を証明する際の中心的な対象である。$n\to\infty$ のとき、$\sum_{\text{奇数}k}1/k^2=\pi^2/8$ を用いると、我々の和は $4\cdot\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{2}$ に収束する。これはオイラー（Euler）による $\sum 1/k^2=\pi^2/6$ の近い親戚である（数値的には $I_{200}\approx 4.925$ に対して $\pi^2/2\approx 4.935$ である）。フーリエ級数とこれらの和については Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）に詳しく、収束の背後にある解析学については Abbott, *Understanding Analysis*（解析学の入門書）がよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。