解答例

# STEP II 1998、第 3 問

純粋数学 • 望遠鏡型級数

> **STEP II 1998、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s2-q3

## 鍵となる考え方

一般項の分母に連続する因数の積があれば、部分分数（partial fractions）に分解するのが定石である。分解した各項は和をとると互いに打ち消し合い（telescope）、両端の数項だけが残る。後半では、比 $a_n/a_{n-1}$ が与えられているので、$a_n/a_1$ は比の積として表され、その積もまた打ち消し合う。うまくいけば、それによって $a_n$ が前半の級数（series）に戻るのだが、実際にそうなる。

## 解答

**和 $S_N$**

次のようにおく。

$$\frac{2n-1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}.$$

カバーアップ法（cover-up rule）を用いる。$n=0$ のとき $A = \frac{-1}{1\cdot 2} = -\frac{1}{2}$、$n=-1$ のとき $B = \frac{-3}{(-1)(1)} = 3$、$n=-2$ のとき $C = \frac{-5}{(-2)(-1)} = -\frac{5}{2}$ である。よって

$$\frac{2n-1}{n(n+1)(n+2)} = -\frac{1}{2n} + \frac{3}{n+1} - \frac{5}{2(n+2)}.$$

$A+B+C=0$ であることに注意する。これこそが和が打ち消し合う理由である。

$H_N = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N}$ とおく。すると

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} = H_N - 1 + \frac{1}{N+1}, \qquad \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+2} = H_N - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}.$$

したがって

$$\begin{aligned} S_N &= -\tfrac{1}{2}H_N + 3\left(H_N - 1 + \frac{1}{N+1}\right) - \tfrac{5}{2}\left(H_N - \tfrac{3}{2} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}\right) \\ &= \left(-\tfrac{1}{2} + 3 - \tfrac{5}{2}\right)H_N + \left(-3 + \tfrac{15}{4}\right) + \left(3 - \tfrac{5}{2}\right)\frac{1}{N+1} - \frac{5}{2(N+2)} \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{2(N+1)} - \frac{5}{2(N+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{N+1} - \frac{5}{N+2}\right), \end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られた。$H_N$ の係数が消えるのは $A+B+C=0$ だからである。

$N \to \infty$ のとき、$\frac{1}{N+1}$ と $\frac{5}{N+2}$ はともに 0 に収束（converge）するので、

$$S_N \to \frac{3}{4}.$$

**数列 $a_n$**

$n \geq 2$ に対して、与えられた比を掛け合わせる。

$$\frac{a_n}{a_1} = \prod_{k=2}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}} = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k+2} \times \prod_{k=2}^{n} \frac{2k-1}{2k-3}.$$

**考えてみよう** この二つの積はどのように簡単になるか。

書き出してみよう。二つ目の積は、各分子が次の分母と打ち消し合うので、そのまま消えていく。

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{2k-1}{2k-3} = \frac{3}{1}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{7}{5}\cdots\frac{2n-1}{2n-3} = 2n-1.$$

一つ目の積では、分子は $1, 2, \ldots, n-1$、分母は $4, 5, \ldots, n+2$ をわたる。4 から $n-1$ までがすべて約分されるので、

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k+2} = \frac{(n-1)!}{(n+2)!/3!} = \frac{6}{n(n+1)(n+2)}.$$

この階乗（factorial）による表示は、約分するものがない $n < 5$ の場合も含め、すべての $n \geq 2$ で成り立つ。したがって

$$\frac{a_n}{a_1} = \frac{6(2n-1)}{n(n+1)(n+2)}.$$

$n = 1$ のとき右辺は $\frac{6}{6} = 1$ となるので、この式はすべての $n \geq 1$ で成り立つ。確認として、$n = 2$ とすると $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$ となり、与えられた比 $\frac{1\cdot 3}{4\cdot 1}$ と一致する。

$a_1 = \frac{2}{9}$ のとき、

$$a_n = \frac{2}{9}\cdot\frac{6(2n-1)}{n(n+1)(n+2)} = \frac{4}{3}\cdot\frac{2n-1}{n(n+1)(n+2)}.$$

よって $a_n$ は前半の級数の第 $n$ 項の $\frac{4}{3}$ 倍である。その部分和（partial sums）は $\frac{4}{3}S_N \to \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}$ となるので、

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1.$$

## 検算

- $N=1$：公式から $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-\frac{5}{3}\right)=\frac{1}{6}$ となり、これは第 1 項 $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}$ である。$N=2$ のときは $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{3}-\frac{5}{4}\right)=\frac{7}{24}=\frac{1}{6}+\frac{1}{8}$ となる。どちらも正しい。
- 数値的には、最初の 1999 項の和は 0.74900… であり、公式が予測するとおり下から $\frac{3}{4}$ に近づいている（$S_N \approx \frac{3}{4}-\frac{2}{N}$）。
- $a_1=\frac{2}{9}$ として漸化式（recurrence）から $a_n$ を生成すると、最初の 299 項の和は 0.9911… となる。残りの部分はおよそ $\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{300}\approx 0.009$ なので、総和が 1 であることと矛盾しない。

## よくある間違い

- 打ち消し合う和の両端の扱いを誤る。上のように $H_N$ を用いて書けば、項の管理を正確に行える。
- 階乗の積で位置を一つずらして誤る。約分する前に、最初と最後のいくつかの因数を書き出すこと。
- $a_n/a_1$ の式が、積が空となる $n=1$ でも成り立つことの確認を忘れる。

## STEP のその先へ

打ち消し合う和は、微分積分学の基本定理（fundamental theorem of calculus）の離散版である。$\int f' = f(b)-f(a)$ と同様に、$\sum(f(n+1)-f(n)) = f(N+1)-f(1)$ が成り立つ。後半の数列は**超幾何**数列（hypergeometric sequence）であり、隣り合う項の比が $n$ の有理関数（rational function）になっている。Gosper のアルゴリズムは、そのような和が閉じた形で表せるのはどのような場合かを正確に判定するものであり、数式処理システム（computer algebra system）はこの方法で級数の和を求めている。部分和の極限の解析については、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門書）を参照のこと。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。