解答例

STEP II 1998、第 2 問

純粋数学 ・ 二項級数による近似

> **STEP II 1998、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s2-q2

鍵となる考え方

二項級数（binomial series）は引数が小さいほど速く収束（converge）する。そこで、$\sqrt{2}$（あるいは $\sqrt[3]{2}$）を、簡単な有理数と、x がごく小さい $(1+x)^a$ との積として表したい。平方根については、$49/50$ が 1 に非常に近く、しかも因数 2 を含んでいる。立方根については、別の立方数の $2\times$ にほぼ等しい立方数を探す。すると $128 = 2\times 4^3$ が $125 = 5^3$ のすぐ隣にあることがわかる。

解答

2 の平方根

まず、与えられた式を $\sqrt{2}$ と結びつける。$1 - \frac{1}{50} = \frac{49}{50}$ であるから、

$$\left(1-\frac{1}{50}\right)^{1/2} = \frac{7}{\sqrt{50}} = \frac{7}{5\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{10}, \qquad \text{よって} \qquad \sqrt{2} = \frac{10}{7}\left(1-\frac{1}{50}\right)^{1/2}.$$

$(1+x)^{1/2}$ の二項級数は

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 - \cdots,$$

と始まり、$|x| < 1$ で成り立つ。$y = \frac{1}{100}$ として $x = -\frac{2}{100} = -2y$ とおく。すると 2 のべきがうまく打ち消し合う。

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{2}{100}\right)^{1/2} &\approx 1 - \tfrac{1}{2}(2y) - \tfrac{1}{8}(2y)^2 - \tfrac{1}{16}(2y)^3 \\ &= 1 - y - \tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{1}{2}y^3 \\ &= 1 - 0.01 - 0.00005 - 0.0000005 \\ &= 0.9899495.\end{aligned}$$

1/50 を 2/100 と書くと便利なのはこのためである。各項が 10 のべきに 1 または $\frac{1}{2}$ を掛けたものになるので、計算はすべて有限小数で正確に行える。

したがって

$$\sqrt{2} \approx \frac{10 \times 0.9899495}{7} = \frac{9.899495}{7} = 1.41421357\ldots,$$

となり、求められているとおり、小数第 6 位まで $\sqrt{2} \approx 1.414214$ である。

2 の立方根

考えてみよう N と a はどう選ぶか。$(1 + N/125)^a$ が $\sqrt[3]{2}$ と関係するのはどういうときか。

$125 = 5^3$ であるから、$(125 + N)/125$ の立方根は $\sqrt[3]{125 + N}/5$ となる。したがって、N を小さく保ちつつ、$125 + N$ が完全立方数の 2 倍になるようにしたい。2×1^3, 2×2^3, 2×3^3, $2 \times 4^3 = 2, 16, 54, 128$ を見ると、128 は 125 とわずか 3 しか違わない。そこで $N = 3$、$a = \frac{1}{3}$ とすると、

$$\left(1 + \frac{3}{125}\right)^{1/3} = \frac{\sqrt[3]{128}}{5} = \frac{4\sqrt[3]{2}}{5}, \qquad \text{よって} \qquad \sqrt[3]{2} = \frac{5}{4}\left(1 + \frac{3}{125}\right)^{1/3}.$$

$(1 + x)^{1/3}$ の二項級数は

$$(1+x)^{1/3} = 1 + \tfrac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}\cdot(-\frac{2}{3})}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{3}\cdot(-\frac{2}{3})\cdot(-\frac{5}{3})}{3!}x^3 + \cdots = 1 + \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{9}x^2 + \tfrac{5}{81}x^3 - \cdots.$$

と始まる。先ほどと同様、置き換えによって計算がすっきりする。$y = \frac{1}{125} = 0.008$ として $x = 3y$ とおくと、$\frac{1}{3}x = y$、$\frac{1}{9}x^2 = y^2$、$\frac{5}{81}x^3 = \frac{5}{3}y^3$ となる。よって

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{3}{125}\right)^{1/3} &\approx 1 + y - y^2 + \tfrac{5}{3}y^3 \\ &= 1 + 0.008 - 0.000064 + \tfrac{5}{3}(0.000000512) \\ &= 1.007936 + 0.00000085333\ldots \\ &= 1.00793685333\ldots.\end{aligned}$$

$\frac{5}{4}$ を掛けると

$$\sqrt[3]{2} \approx 1.25 \times 1.00793685333\ldots = 1.25992106\ldots,$$

となり、小数第 6 位まで $\sqrt[3]{2} \approx 1.259921$ である。

検算

電卓によれば $\sqrt{2} = 1.41421356\ldots$、$\sqrt[3]{2} = 1.25992105\ldots$ であるから、どちらの近似値も小数第 6 位まで正しい。ここで得た値は 1.41421357 と 1.25992107 である。両方の級数について、コンピュータで正確な分数を用いて確認した。省略した最初の項を見れば誤差の大きさがわかる。$-\frac{5}{128}x^4$ は $\sqrt{2}$ の近似値に約 -9×10^{-9} だけ寄与し、$-\frac{10}{243}x^4$ は $\sqrt[3]{2}$ の近似値に約 -1.7×10^{-8} だけ寄与する。どちらも、小数第 6 位を変えてしまう 5×10^{-7} よりはるかに小さい。

よくある間違い

- 倍率を元に戻し忘れること。級数から得られるのは $\frac{7\sqrt{2}}{10}$ と $\frac{4\sqrt[3]{2}}{5}$ であって、$\sqrt{2}$ や $\sqrt[3]{2}$ そのものではない。
- 級数の符号の誤り。前半では x が負なので、1 の後の 4 つの項はすべて負になる。後半では符号が交互に変わる。
- 早すぎる段階での丸め。最後の割り算や掛け算までは、少なくとも小数第 8 位まで保持すること。

STEP のその先へ

この問題の背後には、剰余項（remainder term）つきのテイラー（Taylor）の定理がある。これは「次の項はごく小さい」という感覚を、誤差に対する厳密な評価に変えるものである。この定理によって、比がおよそ 0.02 の級数では 1 項ごとに小数がおよそ 1.5 桁から 2 桁ずつ正確になる理由が説明できる。また、目標とする数の簡単な倍数に p^n/q^n が近くなるような有理数 p/q を見つけるという同じ工夫は、数論における連分数（continued fraction）や有理近似（rational approximation）につながる。これらについて読むには Davenport の *The Higher Arithmetic*（数論の入門書）がよく、テイラーの剰余項については Abbott の *Understanding Analysis*（解析学の入門書）が丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。