解答例

STEP II 1998、第 14 問

確率・統計 ・ 二項分布とポアソン分布の期待値

> **STEP II 1998、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s2-q14

鍵となる考え方

データベース上の分類はどうであれ、これは確率の問題である。ドゥーム博士は、新しい制度のもとでの給与の**期待値**（expected value）が固定給 A を上回るならば、新制度を選ぶべきである。不合格者の数は二項分布（binomial distribution）に従うので、$\mathrm{E}[1/(1+X)]$ を求める必要がある。厄介な因子 $\frac{1}{k+1}$ は恒等式 $\frac{1}{k+1}\binom{N}{k} = \frac{1}{N+1}\binom{N+1}{k+1}$ によって吸収され、和は $(p+q)^{N+1}$ の二項展開からほんの一部が欠けたものになる。同じ工夫を $\frac{\lambda^k}{(k+1)!}$ に用いれば、ポアソン（Poisson）モデルも扱える。

解答

新制度を受け入れるべきとき

ドゥーム博士の学生のうち不合格となる者の数を X とし、$q = 1 - p$ とおく。学生はそれぞれ確率 p で独立に不合格となるので、$X \sim \mathrm{B}(N, p)$ であり、

$$\mathrm{P}(X = k) = \binom{N}{k} p^k q^{N-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N.$$

ドゥーム博士は給与の期待値によって制度を比較することに納得しているものと仮定する。新制度のもとでの給与は確率変数（random variable）$S = B/(1+X)$ であるから、

$$\mathrm{E}(S) = B \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k+1} \binom{N}{k} p^k q^{N-k}.$$

考えてみよう 和の中にある $\frac{1}{k+1}$ はどうすれば取り除けるか？

階乗（factorial）を用いる：

$$\frac{1}{k+1}\binom{N}{k} = \frac{N!}{(k+1)!\,(N-k)!} = \frac{1}{N+1}\cdot\frac{(N+1)!}{(k+1)!\,((N+1)-(k+1))!}$$
$$= \frac{1}{N+1}\binom{N+1}{k+1}.$$

これを代入し、さらに p の累乗が新しい二項係数（binomial coefficient）と合うように p を掛けて p で割ると、

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(S) &= \frac{B}{(N+1)p}\sum_{k=0}^{N}\binom{N+1}{k+1}p^{k+1}q^{N-k}\\ &= \frac{B}{(N+1)p}\sum_{j=1}^{N+1}\binom{N+1}{j}p^{j}q^{N+1-j}\\ &= \frac{B}{(N+1)p}\left[(p+q)^{N+1}-q^{N+1}\right]\end{aligned}$$

となる。ここでは $j = k+1$ とおき、続いて二項定理（binomial theorem）を用いた。この和は $(p+q)^{N+1}$ の展開全体から $j=0$ の項 q^{N+1} だけが欠けたものだからである。$p+q=1$ より、

$$\mathrm{E}(S) = \frac{B(1-(1-p)^{N+1})}{(N+1)p}.$$

$\mathrm{E}(S) > A$ ならば新制度を受け入れるべきである。両辺に正の数 $(N+1)p$ を掛けると（この式が意味をもつには $p>0$ が必要である。$p=0$ ならば単に B と A を比べればよい）、これは

$$A(N+1)p < B(1-(1-p)^{N+1}),$$

となり、求める条件が得られる。

ポアソンモデル

二項分布 $\mathrm{B}(N,p)$ は、N が大きく p が小さく、Np がほどほどの大きさであるとき、平均 $\lambda = Np$ のポアソン分布（Poisson distribution）でよく近似される。したがって、クラスの人数が多く、各学生が不合格になる可能性が低く、しかも不合格が依然として独立に起こるならば、ドゥーム博士の学生の不合格者数はポアソン分布でモデル化できる。（より一般に、ポアソンモデルは、一つずつ、独立に、一定の平均頻度で起こる不合格に適している。）

$X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$、$\lambda = Np$ のときも同じ考え方が使える。今度は $\frac{1}{k+1}\cdot\frac{1}{k!} = \frac{1}{(k+1)!}$ を用いて、

$$\mathrm{E}\Big(\frac{B}{1+X}\Big) = B\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!} = \frac{B\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}$$
$$= \frac{B\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}(\mathrm{e}^{\lambda}-1) = \frac{B(1-\mathrm{e}^{-\lambda})}{\lambda},$$

となる。最後の和は指数関数の級数（exponential series）から初項 1 が欠けたものだからである。よって、このモデルのもとでのドゥーム博士の給与の期待値は

$$\frac{B(1-\mathrm{e}^{-Np})}{Np} \text{ ポンド.}$$

検算

- $N=1$ のとき：直接計算すると $\mathrm{E}(S)=B\left(q+\frac{1}{2}p\right)=B\left(1-\frac{1}{2}p\right)$ であり、公式からは $B\,\frac{1-q^2}{2p}=B\,\frac{1+q}{2}=B\left(1-\frac{1}{2}p\right)$ が得られる。
- $p\to 0$ のとき：二項分布による式は B に近づき（誰も不合格にならない）、ポアソン分布による式も $\lambda\to 0$ のとき同様に B に近づく。
- 近似がよく効くはずの場合には、二つの答えは一致する。$N=1000$、$p=0.003$ のとき、$\mathrm{E}(S)/B$ は二項分布の公式から 0.31655、ポアソン分布の公式から 0.31674 となる。$N=20$、$p=0.3$ の場合は、厳密な数え上げでもシミュレーションでも $\mathrm{E}(S)/B\approx 0.1586$ となる。

よくある間違い

- $\mathrm{E}\left(\frac{1}{1+X}\right)=\frac{1}{1+\mathrm{E}(X)}=\frac{1}{1+Np}$ と書いてしまう。期待値は非線形な関数を素通りしない。実際、$\frac{1}{1+x}$ は凸（convex）なので、イェンセンの不等式（Jensen's inequality）により真の値のほうが大きい。
- 添字を付け替えた和に $j=0$ の項が欠けていることを忘れ、$\mathrm{E}(S)=B/((N+1)p)$ としてしまう。

STEP のその先へ

ここでの工夫は、$\frac{1}{1+x}=\int_0^1 t^x\,\mathrm{d}t$ を用いて $\mathrm{E}\big(1/(1+X)\big)$ を計算する方法の特別な場合である。この方法により、これは確率母関数（probability generating function）$G(t)=\mathrm{E}(t^X)$ と結びつき、答えは $\int_0^1 G(t)\,\mathrm{d}t$ となる。$G(t)=(q+pt)^N$ と $G(t)=\mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$ で試してみよ。母関数や、二項分布のポアソン分布への収束（convergence）については、Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）によくまとめられている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。