解答例

STEP II 1998、第 13 問

確率・統計 ・ 指数分布

STEP II 1998、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/98-s2-q13

鍵となる考え方

最初の結果は指数分布（exponential distribution）の**無記憶性**（memoryless property）である。すなわち、あるサービスがすでに時間 t だけ続いているとき、残りの時間は新たに始まるサービスと同じ分布に従う。これさえ得られれば、店の話にはほとんど計算がいらない。サービスの途中にある客は、確率的には、新たにサービスを受け始める客とまったく同じである。したがって、問題となるどの時点においても、まだサービス中の人々の間の競争は、同一で独立な指数分布に従う時間どうしの競争になる。

解答

無記憶性

$x \geq 0$ に対して、

$$\mathrm{P}(X > x) = \int_x^\infty \lambda \mathrm{e}^{-\lambda u}\,\mathrm{d}u = \Big[-\mathrm{e}^{-\lambda u}\Big]_x^\infty = \mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

$s, t \geq 0$ をとる。事象 $\{X > s+t\}$ は $\{X > t\}$ に含まれるので、両者の共通部分はちょうど $\{X > s+t\}$ である。条件付き確率（conditional probability）の定義により、

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X > s+t \mid X > t) &= \frac{\mathrm{P}(X > s+t \text{ かつ} X > t)}{\mathrm{P}(X > t)} = \frac{\mathrm{P}(X > s+t)}{\mathrm{P}(X > t)} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(s+t)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}} = \mathrm{e}^{-\lambda s} = \mathrm{P}(X > s),\end{aligned}$$

となり、これが求める結果である。（$\mathrm{P}(X > t) = \mathrm{e}^{-\lambda t} > 0$ であるから、割り算をしてよい。）

2 人の客がともにまだサービス中である確率

モデル：2 つのサービス時間は独立（independent）であり、それぞれが与えられた指数分布に従うとする。私が到着したときにサービスを受けている 2 人の客を A、B とする。

> **考えてみよう** 客 A はすでに未知の長さの時間だけサービスを受けている。そのことは、あとどれだけかかるかの分布を変えないのだろうか？

変えない。これこそが最初の小問の主張である。A のサービスがこれまでに u だけ続いたとする。すると、さらに少なくとも t だけ続く確率は

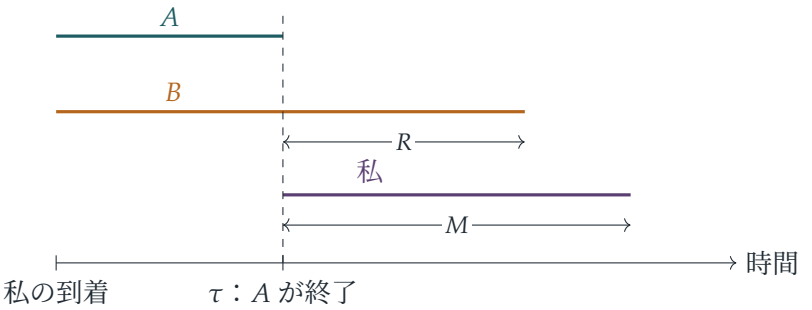
$$\mathrm{P}(X > u + t \mid X > u) = \mathrm{P}(X > t) = \mathrm{e}^{-\lambda t},$$

であり、これは u によらない。したがって、私が店に入った瞬間からの A の**残りの**サービス時間は、同じパラメータ λ の指数分布に従い、B についても同様である。サービス時間全体が独立であるから、2 つの残り時間も独立である。よって

$$\mathrm{P}(\text{両者がまだサービス中、時刻}t) = \mathrm{e}^{-\lambda t} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t} = \mathrm{e}^{-2\lambda t}.$$

もう一人の客が終わるとき、私はまだサービス中か？

A が先に終わり、それが私の到着から時間 τ 後であるとし、私はすぐに A を担当していた店員のところへ行くとする。



時刻 τ において、B がまだ必要とする時間を R、私のサービス時間を M とする。

- 私のサービスは τ で新たに始まるので、M はパラメータ λ の指数分布に従う。異なる客のサービス時間は独立であるから、M はそれ以前のすべてと独立である。
- R もパラメータ λ の指数分布に従う。時刻 τ において、B はすでにある長さの時間（私の到着前の時間と τ の和）だけサービスを受けており、ふたたび無記憶性により、残り時間はもとの分布に従う。また R は M と独立である。

B が終わるときに私がまだサービス中であるのは、ちょうど $M > R$ のときである。ここで M と R は独立で**同じ**連続分布に従うので、対称性（symmetry）により $\mathrm{P}(M > R) = \mathrm{P}(R > M)$ である。また、連続確率変数（continuous random variable）では $\mathrm{P}(M = R) = 0$ であるから、これら 2 つの確率の和は 1 である。よって

$$\mathrm{P}(\text{もう一人の客が終わるとき私がまだサービス中}) = \tfrac{1}{2}.$$

対称性による議論よりも計算を好むなら、R で条件付ければよい：

$$\mathrm{P}(M > R) = \int_0^\infty \lambda \mathrm{e}^{-\lambda r}\, \mathrm{P}(M > r)\, \mathrm{d}r = \int_0^\infty \lambda \mathrm{e}^{-2\lambda r}\, \mathrm{d}r = \tfrac{1}{2}.$$

検算

- $t = 0$ では $\mathrm{e}^{-2\lambda t} = 1$ である。すなわち、私が到着したとき 2 人の客は確実にサービス中である。$t \to \infty$ のとき確率は 0 に近づき、これも当然である。
- 答え $\frac{1}{2}$ は λ によらない。λ を変えても時間の単位が変わるだけなので、これは予想どおりである。
- $\lambda = 0.7$、$t = 0.9$ としたシミュレーション（simulation）では、2 人の客がともにまだサービス中である割合は 0.2831 となり、$\mathrm{e}^{-1.26} \approx 0.2837$ とよく一致した。2 人の客がすでにランダムな長さの時間だけサービスを受けている状況のシミュレーションでは、私がまだサービス中であった試行の割合は 0.5000 であった。

よくある間違い

- すでにサービス中の客は「もうすぐ終わるはず」なので、残り時間はより短いと考えてしまうこと。指数分布では、すでに起きたことは何の影響も与えない。
- $\mathrm{P}(X > s + t \text{ かつ} X > t)$ を $\mathrm{P}(X > s + t)\, \mathrm{P}(X > t)$ と書いてしまうこと。これらの事象は独立ではなく、一方が他方を含んでいる。

STEP のその先へ

無記憶性をもつ連続分布は指数分布だけである。この事実は**ポアソン過程**（Poisson process）や**待ち行列理論**（queueing theory）の土台となっており、そこでは c 人の店員がいてサービス時間が指数分布に従う店は、古典的な M/M/c 待ち行列にあたる。2 人の客についての計算は n 人に拡張できる。パラメータ λ の独立な n 個の指数確率変数の最小値は、パラメータ $n\lambda$ の指数分布に従い（裾確率（tail probability）を掛け合わせればよい）、対称性により、どの変数も等しい確率で最小となる。Grimmett and

Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、指数確率変数とポアソン過程をこの水準で扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。