解答例

STEP II 1998、第 12 問

確率・統計 ・ ベイズの定理

> **STEP II 1998、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s2-q12

この問題は、*Beyond STEP* の第 12.2 節「**基準率の誤謬**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/base-rate.html

鍵となる考え方

これはベイズの定理（Bayes' theorem）を 2 回使う問題である。前半は古典的な「まれな病気」の意外な結果である。病気がまれであれば、かなり精度の高い検査であっても、陽性の大半が偽陽性（false positive）になりうる。後半で要となるのは、STEP を受ける人々が母集団からの無作為標本ではないと気づくことである。彼らは AL 陽性の集団であり、したがって前半の答えが 2 回目の検査に対する**事前確率**（prior）となる。

解答

ある人が数学炎（mathematitis）にかかっているという事象を D、検査 AL が陽性であるという事象を A、検査 STEP が陽性であるという事象を B とする。与えられているのは

$$\mathrm{P}(D) = \frac{1}{100}, \qquad \mathrm{P}(A \mid D) = \frac{9}{10}, \qquad \mathrm{P}(A \mid D') = \frac{1}{11}.$$

である。

Frankie の確率

全確率の法則（law of total probability）により、

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A) &= \mathrm{P}(A \mid D)\,\mathrm{P}(D) + \mathrm{P}(A \mid D')\,\mathrm{P}(D') \\ &= \frac{9}{10}\cdot\frac{1}{100} + \frac{1}{11}\cdot\frac{99}{100} = \frac{9}{1000} + \frac{9}{100} = \frac{99}{1000}.\end{aligned}$$

次にベイズの定理により、

$$\mathrm{P}(D \mid A) = \frac{\mathrm{P}(A \mid D)\,\mathrm{P}(D)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{9/1000}{99/1000} = \frac{1}{11}.$$

したがって、AL の結果が陽性であっても、Frankie が患者である確率はわずか $\frac{1}{11}$ にすぎない。1000 人の集団で考えると、患者のうち約 9 人が陽性となるが、非患者 990 人のうち約 90 人も陽性となり、偽陽性が真の陽性を圧倒してしまうのである。

p を求める

ここで、AL が陽性であった人々に注目を限定する。この集団の中では

$$\mathrm{P}(D \mid A) = \tfrac{1}{11}, \qquad \mathrm{P}(D' \mid A) = \tfrac{10}{11}.$$

である。STEP についての与えられた情報は $\mathrm{P}(B \mid D \cap A) = 0.9$ および $\mathrm{P}(B \mid D' \cap A) = p$ と読む。すなわち、STEP の振る舞いはその人が患者であるかどうかのみに依存し、AL の結果には依存しない。

> ? **考えてみよう** なぜ $\mathrm{P}(D) = \frac{1}{100}$ から改めて始めないのか？

STEP は AL 陽性であった人々にしか課されず、その集団における患者の割合はもはや 1% ではないからである。それは $\frac{1}{11}$ であり、まさに前半で求めた値である。1 回目の検査の事後確率（posterior）が 2 回目の事前確率となるのである。

AL 陽性の集団の中では、

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(D \cap B \mid A) &= \frac{1}{11}\cdot\frac{9}{10} = \frac{9}{110}, \\ \mathrm{P}(D' \cap B \mid A) &= \frac{10}{11}\cdot p = \frac{10p}{11}.\end{aligned}$$

両方の検査で陽性となった人の半数が患者であると与えられている。すなわち $\mathrm{P}(D \mid A \cap B) = \frac{1}{2}$ である。これは上の 2 つの確率が等しいことを意味する：

$$\frac{9}{110} = \frac{10p}{11} \quad\Longrightarrow\quad p = \frac{9}{100} = 0.09.$$

検算

- オッズ（odds）による形：病気の事前オッズは $1:99$ である。AL はこれに $\frac{0.9}{1/11} = 9.9$ を掛け、$9.9:99 = 1:10$ を与える。これは $\frac{1}{11}$ と一致する。オッズを $1:1$ にするには STEP が 10 を掛けなければならないので、$\frac{0.9}{p} = 10$ より $p = 0.09$ である。
- 200 万人に両方の検査を受けさせるシミュレーション（$p = 0.09$）では、AL 陽性者に占める患者の割合は 0.0909、両方の検査で陽性の人に占める割合は 0.5003 となった。

よくある間違い

- STEP の事前確率として $\mathrm{P}(D) = 0.01$ を用いること。このとき $p = 0.0009$ となり、100 倍小さすぎる。
- $\mathrm{P}(A \mid D) = 0.9$ と $\mathrm{P}(D \mid A)$ を混同すること。前半の要点はまさに、この 2 つが大きく異なるということである。

STEP のその先へ

ベイズの定理をオッズの形、すなわち事後オッズは事前オッズに尤度比（likelihood ratio）を掛けたものに等しいという形で書くと、逐次的な検査はほとんど機械的になる。独立な証拠が 1 つ加わるごとに、オッズにその証拠固有の因子を掛けるだけでよいのである。これはベイズ推論（Bayesian inference）の基礎であり、実際の医療スクリーニング計画の設計の基礎でもある。ここで置いた仮定、すなわち病気の有無を与えたもとで検査が条件付き独立（conditionally independent）であるという仮定は、「ナイーブベイズ」分類器の背後にある仮定と同じものである。Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）は、条件付き確率とベイズの規則を、この問題のような多くの例とともに見事に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。