解答例

STEP II 1998、第 11 問

力学 ・ 放物運動

> **STEP II 1998、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s2-q11

この問題は、*Beyond STEP* の第 11.11 節「**野手はどのように捕球するか**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch11/fielders.html

鍵となる考え方

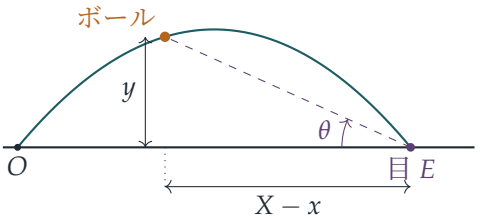
原点をボールが打たれた点（目の高さにある）にとり、$\tan\theta$ を「ボールの高さを、野手（fielder）の目からの水平距離で割ったもの」と書く。目の高さから出発して目の高さに戻ってくる放物体（projectile）の高さは $\frac{1}{2}g\,t(T-t)$ と因数分解できる。ここで T は飛行時間（time of flight）である。野手が正しい位置にたどり着くなら、水平方向の隔たりも $T-t$ の定数倍になる。こうして因数 $T-t$ が約分され、$\tan\theta$ は t に比例する。

解答

ボールを重力のみを受けて運動する質点とみなし（空気抵抗（air resistance）は無視する）、野手の目をボールが打たれた点と同じ高さにある一点とみなす。打った点 O から野手の方向へ水平に x 軸を、鉛直上向きに y 軸をとる。ボールの初速度の水平成分を $U>0$、鉛直成分を $W>0$ とする。このとき時刻 t において

$$x = Ut, \qquad y = Wt - \tfrac{1}{2}gt^2 = \tfrac{1}{2}g\,t\,(T-t), \qquad \text{ただし} T = \frac{2W}{g}$$

であり、これはボールが目の高さに戻ってくる時刻である。



野手の目の水平位置を X とすると（ボールが飛んでいる間は $X > x$ である）、視線は水平から角 θ だけ上向きになり、

$$\tan\theta = \frac{y}{X-x}$$

が成り立つ。

静止している野手

「完璧な位置にいる」とは、ボールが野手の目に届くということである。すなわち野手の目は、ボールが目の高さに戻ってくる点 $X = UT$ にある。このとき $0 < t < T$ に対して

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}gt(T-t)}{UT-Ut} = \frac{\frac{1}{2}gt(T-t)}{U(T-t)} = \frac{g}{2U}t,$$

となる。ここで、ボールが飛んでいる間は 0 でない $T-t$ を約分した。したがって

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tan\theta) = \frac{g}{2U},$$

であり、これは求めるとおり定数である。（捕球の直前には $\tan\theta \to gT/(2U) = W/U$ となる。つまり野手には、ボールが打たれたときとちょうど同じ角度で飛び込んでくるように見える。これは放物線（parabola）の対称性から予想されるとおりである。）

走っている野手

次のボールの速度成分を U, W とし（したがって再び $T = 2W/g$ として $y = \frac{1}{2}gt(T-t)$ である）、ボールが打たれた瞬間に野手は O から距離 D の位置にいて、打者（batsman）に向かって一定の速さ v で走るとする。野手の目は $X = D - vt$ にあるから、

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}gt(T-t)}{D-(U+v)t}. \qquad (*)$$

野手がボールを捕れるのは、時刻 T にボールが目の高さに戻ってくる点にちょうど野手の目があるとき、すなわち

$$D - vT = UT \quad\Longleftrightarrow\quad D = (U+v)T.$$

のときである。これが成り立つことと $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tan\theta)$ が定数であることが同値であることを示す。そうすれば、「$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tan\theta)$ が一定に保たれるように v を選べ」が正しい規則であることがわかる。

野手が正しい速さを選んだとすると、$D=(U+v)T$ であり、$(*)$ は

$$\tan\theta=\frac{\frac{1}{2}gt(T-t)}{(U+v)(T-t)}=\frac{g}{2(U+v)}t,\qquad \text{よって}\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tan\theta)=\frac{g}{2(U+v)},$$

となり、これは定数である。これはちょうど前半の結果で、U を野手に対するボールの相対速度（relative velocity）の大きさ $U+v$ に置き換えたものになっている。

考えてみよう これでは必要なことの半分しか示していないのではないか。ほかの v でも変化率が一定になることはないだろうか。

そのようなことはない。飛行中ずっと $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tan\theta)=k$（定数）であるとする。$t=0$ ではボールは目の高さにあるので $\tan\theta=0$ であり、したがって $\tan\theta=kt$ である。これを $(*)$ に代入して t で割ると（$0<t<T$ に対して）、

$$\tfrac{1}{2}g(T-t)=k\big(D-(U+v)t\big)\quad \text{すべての}t\in(0,T).$$

が成り立つ。区間上で一致する t の 1 次関数どうしは係数が等しいから、

$$\tfrac{1}{2}g=k(U+v)\qquad\text{and}\qquad \tfrac{1}{2}gT=kD.$$

である。第 1 式から $k\neq 0$ がわかる。第 2 式を第 1 式で割ると $D=(U+v)T$ が得られ、これはまさに捕球の条件である。

以上より、野手をボールのところまで運ぶ速さ $v=D/T-U$ は、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tan\theta)$ が一定に保たれる速さとちょうど一致する。実際には、ボールが空中にある間に野手が $D/T-U$ を計算することはできないが、ボールを見ることはできる。視界の中でボールがますます速く上昇していくように見えるなら、野手は後ろにいすぎるのでもっと速く走るべきであり、ますますゆっくり上昇していくように見えるなら速度を緩めるべきである。（野手は打者に向かって走るので、ボールは野手の出発点より手前に落ちる。すなわち $D>UT$ であるから $v>0$ である。）

検算

- 後半で $v=0$ とおくと前半の結果に戻る。すなわち $D=UT$ であり、変化率は $g/(2U)$ である。
- 単位：g/U の単位は $\mathrm{m\,s^{-2}}/\mathrm{m\,s^{-1}}=\mathrm{s^{-1}}$ であり、無次元量の変化率として正しい。

- 数値例：$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ とし、$20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、45° で打たれたとすると、$T \approx 2.886\,\mathrm{s}$ で、飛距離は $40.82\,\mathrm{m}$ である。その地点に立っている野手には、$\tan\theta$ が $g/(2U) \approx 0.346\,\mathrm{s^{-1}}$ の割合で増加するように見える。代わりに $49.47\,\mathrm{m}$ 離れた位置から出発して $3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ で走る場合には、変化率は $0.286\,\mathrm{s^{-1}}$ である。多くの時刻で $(*)$ を数値的に微分すると、どちらの変化率も一定であること、また誤った v では変化率が変化することが確かめられる。

よくある間違い

- θ を野手の目からではなく打者から測ってしまう。$\tan\theta$ に現れる水平距離は $X - x$ であって、x ではない。
- 正しい v なら変化率が一定になることだけを証明し、変化率が一定なら v が正しい値に決まることを示さない。この規則を実際に使えるものにしているのは、その逆（converse）のほうである。

STEP のその先へ

これは捕球の心理学における「光学的加速度相殺」（optical acceleration cancellation）という考え方である。野手は、ボールがどこに落ちるかを予測することなく、ボールの像が一定の割合で上昇するように走っているらしい。これはフィードバック制御則（feedback control law）の一例であり、軌道を計算する代わりに、観測される量を一定に保つのである。放物体の運動、相対速度、そしてこうした考え方の初歩については、Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照せよ。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。