解答例

STEP II 1998、第 10 問

力学 ・ 動く楔上の質点

STEP II 1998、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/98-s2-q10

鍵となる考え方

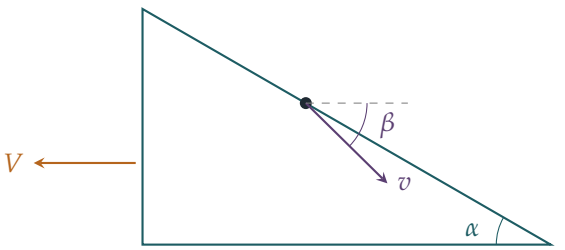
問題全体を動かしているのは二つの事実である。第一に、粒子は面上にとどまるので、そのくさび（*wedge*）に対する速度は面に沿った向きでなければならない。第二に、系の外部から水平方向に押す力はなく、重力以外に仕事をする力もないので、水平方向の運動量とエネルギーがともに保存される。(i)–(iii) はいずれも、これらの事実の一つを式で表したものである。さらに小問 (ii) によって β が決して変化しないことがわかり、そのおかげで最後の部分は等加速度運動に帰着する。

解答

モデル化。粒子は質点とし、くさびは回転せずに滑る剛体とする。面と床はなめらかであり、粒子は面から離れないものとする。図のように、面は右下がりに傾いているとする。すると粒子は右下へ動き、くさびは左へ押される。

水平成分は右向きを正、鉛直成分は上向きを正とすると、

$$\text{粒子の速度} = (v\cos\beta,\ -v\sin\beta), \qquad \text{くさびの速度} = (-V,\ 0).$$



小問 (i)

くさびに対する粒子の相対速度（relative velocity）は

$$(v\cos\beta,\, -v\sin\beta) - (-V,\, 0) = (v\cos\beta + V,\, -v\sin\beta).$$

である。粒子が面上にある間、この相対速度は面に沿っており、水平から下向きに角 α をなす（右下を向く）。よって

$$\frac{v\sin\beta}{v\cos\beta + V} = \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

分母を払うと、

$$\begin{aligned} & v\sin\beta\cos\alpha = v\cos\beta\sin\alpha + V\sin\alpha \\ \Longrightarrow \quad & V\sin\alpha = v(\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha) = v\sin(\beta-\alpha), \end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られた。これは純粋に運動学（kinematics）の議論である。力学の原理は何も必要なく、粒子が面から離れないという事実だけを使っている。

小問 (ii)

原理：水平方向の運動量保存（conservation of linear momentum）。粒子とくさびを一つの系とみなす。この系にはたらく外力は二つの重力と床からの垂直抗力（normal reaction）であり、床がなめらかなので、これらはすべて鉛直方向である（粒子と面の間の抗力は内力である）。したがって水平方向の運動量の総和は一定であり、すべてが静止状態から動き始めるので、その値は 0 である：

$$mv\cos\beta - MV = 0, \qquad \text{よって} \qquad V = \frac{m}{M}v\cos\beta.$$

これを (i) に代入し、$\sin(\beta-\alpha)$ を展開すると、

$$\frac{m}{M}v\cos\beta\sin\alpha = v(\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha).$$

$t > 0$ では粒子は動いているので $v \neq 0$ である。また $\cos\alpha \neq 0$ であり、さらに $\cos\beta \neq 0$ である。実際、もし β が 90° ならば、運動量の式から $V = 0$ となり、すると (i) から $\sin(\beta-\alpha) = 0$、すなわち $\beta = \alpha < 90^\circ$ となって矛盾する。$v\cos\alpha\cos\beta$ で割ると、

$$\frac{m}{M}\tan\alpha = \tan\beta - \tan\alpha \quad \Longrightarrow \quad \tan\beta = \left(1 + \frac{m}{M}\right)\tan\alpha.$$

考えてみよう なぜ β は単純に α と等しくならないのだろうか？

面そのものが左へ遠ざかっていくからである。くさびから見れば粒子は角 α で斜面を下るが、くさびが後退するため、地面から見ると粒子はより急な角度で落ちていく。

(ii) の右辺が定数であることに注意しよう。β はどの瞬間でも同じ値をとるので、粒子は直線上を運動する。$M \to \infty$ とするとくさびは動かなくなり、$\beta \to \alpha$ となる。これは当然そうあるべき結果である。

小問 (iii)

原理：エネルギー保存（conservation of energy）。接触はすべてなめらかなので、系全体に対して仕事をする力は重力だけである（粒子と面の間の垂直抗力はそれぞれの物体に対しては仕事をするが、相対速度が面に沿っていて抗力と垂直なので、二つの仕事は打ち消し合う。床からの抗力はくさびの運動と垂直である）。くさびの重心（centre of mass）は鉛直方向には動かないので、位置エネルギーの減少量は mgy である。静止状態から始まるので、

$$mgy = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}MV^2.$$

(ii) から得た $V = \dfrac{m}{M} v\cos\beta$ を用いると、

$$mgy = \tfrac{1}{2}mv^2 + \frac{m^2v^2\cos^2\beta}{2M}.$$

$2/m$ を掛けると、

$$2gy = v^2\Big(1 + \frac{m\cos^2\beta}{M}\Big) = \frac{v^2\,(M + m\cos^2\beta)}{M},$$

となり、示すべき式が得られた。

y についての微分方程式

粒子が下降する速さは、その速度の下向き成分である：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v\sin\beta.$$

(iii) に $v = \dot{y}/\sin\beta$ を代入する（$\beta > \alpha > 0$ なので $\sin\beta \neq 0$ であることに注意）。すると次の微分方程式（differential equation）が得られる：

$$\Big(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big)^2 = k\,y, \qquad \text{ただし} \qquad k = \frac{2gM\sin^2\beta}{M + m\cos^2\beta}.$$

要点は、k が**定数**だということである。(ii) により β が一定だからである。

これを解くために、両辺を t で微分する：

$$2\dot{y}\,\ddot{y} = k\,\dot{y}.$$

$t > 0$ では粒子は下降しているので $\dot{y} > 0$ であり、これで割ってよい：$\ddot{y} = \tfrac{1}{2}k$。粒子の鉛直方向の運動は、一定の加速度

$$\ddot{y} = \frac{gM\sin^2\beta}{M + m\cos^2\beta}.$$

をもつ。$t = 0$ で $y = 0$ かつ $\dot{y} = 0$（静止状態から始まる）として 2 回積分すると、

$$y = \frac{gMt^2 \sin^2 \beta}{2\,(M + m\cos^2 \beta)},$$

となり、これが求める結果である。

（別解として、正の平方根 $\dot{y} = \sqrt{ky}$ をとり、変数分離（separation of variables）してもよい。$\int y^{-1/2}\,\mathrm{d}y = \sqrt{k}\,t$ から $2\sqrt{y} = \sqrt{k}\,t$ となり、同じ答えが得られる。先に微分しておけば、解 $y \equiv 0$ について気にせずに済む。この解も $y(0) = 0$ のもとで $\dot{y}^2 = ky$ を満たすが、ここで考えている運動ではない。）

検算

- **固定されたくさび。** $M \to \infty$ とする。すると $\beta \to \alpha$ かつ $y \to \frac{1}{2}gt^2 \sin^2 \alpha$ となり、これは正しい。固定されたなめらかな斜面上では、斜面に沿った加速度は $g \sin \alpha$ であり、その鉛直成分は $g \sin^2 \alpha$ だからである。
- **数値例。** $M = 2, m = 1, \alpha = 30^\circ$ とすると、(ii) から $\tan \beta = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ となるので $\sin^2 \beta = \frac{3}{7}, \cos^2 \beta = \frac{4}{7}$ であり、公式から $y = \frac{1}{6}gt^2$ が得られる。$g = 9.8, t = 1$ とすると $y \approx 1.6333$ である。くさびと粒子を直接一歩ずつ数値シミュレーションした結果（垂直抗力を接触条件から求めてニュートン（Newton）の運動法則を適用したもの）も同じ値を与え、さらに無作為に選んだ 2000 通りの場合で (i)–(iii) を丸め誤差の範囲内で満たした。

よくある間違い

- 粒子が水平と角 α をなして動くと述べてしまう。それはくさびに対してのみ正しい。
- 斜面の方向や鉛直方向に運動量を保存させてしまう。床からの抗力は鉛直方向の外力なので、保存されるのは水平成分だけである。
- エネルギーの式でくさびの運動エネルギー $\frac{1}{2}MV^2$ を忘れる。

STEP のその先へ

動く面に拘束された粒子は、ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）の古典的な例題である。ラグランジュ力学には大学の 1 年目か 2 年目で出会う。そこでは二つの座標（たとえば、くさびの位置と、粒子が面に沿って下った距離）を選ぶと、拘束力（constraint forces）が方程式から完全に消えてしまうので、一定の加速度がわずか数行

で得られる。拘束のあるニュートン力学や、まさにこの種の問題を数多く扱ったものとしては、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。