解答例

STEP II 1998、第 1 問

純粋数学 ・ ディオファントス方程式と偶奇性

> **STEP II 1998、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s2-q1

鍵となる考え方

3 乗を展開するとほとんどの項が打ち消し合い、定数項の小さい n の 3 次式（cubic）が残る。両辺の偶奇（parity）を比べると、n は偶数でなければならないことがわかる。さらに 3 次式を n^2(何か) $= 54$ の形に書けば、問題は約数（divisor）に関するものに変わる。$(**)$ については、偶数であることを用いた置き換え $n = 2m$ によって、ただちに $(*)$ に帰着する。

解答

方程式 $(*)$

恒等式（identity）$(a+b)^3 - (a-b)^3 = 6a^2b + 2b^3$ に $a = n$、$b = 3$ を代入すると、

$$(n+3)^3 - (n-3)^3 = 18n^2 + 54,$$

を得る。よって $(*)$ は次と同値である。

$$n^3 = 18n^2 + 54, \qquad \text{すなわち} \qquad n^2(n-18) = 54. \tag{1}$$

n は偶数である。 右辺 $18n^2 + 54 = 2(9n^2 + 27)$ は任意の整数 n に対して偶数である。もし n が奇数ならば n^3 は奇数となり、$n^3 = 18n^2 + 54$ に矛盾する。したがって n は偶数である。

n^2 は 54 を割り切る。 (1) の 2 番目の形において、$n - 18$ は整数であるから、54 は n^2 の整数倍である。したがって n^2 は 54 の約数である。

考えてみよう これら 2 つの事実を合わせると、なぜすべての整数が除外されるのか？

n は偶数なので、$n = 2k$ とおく。すると $n^2 = 4k^2$ は 4 の倍数である（また (1) において $n = 0$ とすると $0 = 54$ となるので、$n \neq 0$ である）。ところが $54 = 2 \times 27$ は 4 で割り切れないので、0 以外の 4 の倍数がそれを割り切ることはない。この矛盾により、$(*)$ を満たす整数 n は存在しないことが示された。

（別の見方：$54 = 2 \cdot 3^3$ を割り切る平方数は 1 と 9 だけなので、$n \in \{\pm 1, \pm 3\}$ となるが、これらはすべて奇数である。）

方程式 $(**)$

今度は $b = 6$ とすると、

$$(n+6)^3 - (n-6)^3 = 36n^2 + 432,$$

となるので、$(**)$ は次と同値である。

$$n^3 = 36n^2 + 432.$$

右辺は任意の整数 n に対して偶数であるから、先ほどとまったく同様に n^3 は偶数である。奇数の 3 乗は奇数なので、n は偶数である。

考えてみよう なぜ前半の約数による議論をそのまま使うことができないのか？

$n^2(n-36) = 432$ と書くことはできるが、$432 = 2^4 \cdot 3^3$ は偶数の平方因数を数多く持つ（4、16、36、144）ので、割り切れるかどうかの議論だけでは決着しない。そこで偶数であることを利用する。m を整数として $n = 2m$ とおくと、

$$8m^3 = 36 \cdot 4m^2 + 432 \quad \Longleftrightarrow \quad m^3 = 18m^2 + 54,$$

となり、これはちょうど整数 m に対する方程式 (1) である。言い換えれば、m は $(*)$ を満たす。実際、$n = 2m$ としたときの $(**)$ は、$n = m$ としたときの $(*)$ の両辺を 8 倍したものにほかならない。

$$(2m-6)^3 + (2m)^3 - (2m+6)^3 = 8[(m-3)^3 + m^3 - (m+3)^3].$$

$(*)$ を満たす整数は存在しないことをすでに示したので、そのような m は存在しない。したがって $(**)$ を満たす整数 n は存在しない。

検算

- 展開した式で $n = 1$ を試すと、$(4)^3 - (-2)^3 = 64 + 8 = 72 = 18 + 54$ となる。✓
- 3 次式 $n^3 - 18n^2 - 54$ はちょうど 1 つの実数解をもち、それはおよそ $n \approx 18.164$ であって整数ではない。（$|n| < 10^5$ の範囲でコンピュータにより直接探索しても、どちらの方程式の解も見つからない。）
- $(**)$ の実数解は $n \approx 2 \times 18.164 = 36.33$ であり、置き換え $n = 2m$ による倍率と一致する。

よくある間違い

- $n = 0$ の場合に別途言及する必要があることを忘れる。0 は偶数であるが、0 は 54 の約数ではない。ここでは (1) によってただちに除外される。
- 3 乗をすべて展開して計算ミスをする。恒等式 $(a+b)^3 - (a-b)^3 = 6a^2b + 2b^3$ を使えば手間は半分になる。
- $(**)$ で $n^2 \mid 432$ を示そうとしても行き詰まる。「n は偶数」であることの要点は、置き換え $n = 2m$ にある。

STEP のその先へ

最後の段階、すなわち $(**)$ の解から、同じ形でより小さな数をもつ方程式の解が得られるという部分は、フェルマー（Fermat）の**無限降下法**（method of descent）の簡単な形である。この方法を繰り返し適用すると、$x^3 + y^3 = z^3$ が正の整数解をもたないことが示される。これはフェルマーの最終定理（Fermat's Last Theorem）の 3 乗の場合であり、オイラー（Euler）によって初めて証明された。今回の問題では 3 つの項が等差数列（arithmetic progression）をなしているため、ずっと簡単になっている。実際、$(n-3k)^3 + n^3 = (n+3k)^3$ は $t = n/k$ が $t^3 - 18t^2 - 54$ の根であることを意味し、有理根定理（rational root theorem）によりこの 3 次式は有理数の根をもたないので、どの $k \neq 0$ に対しても整数解は存在しない。Davenport の *The Higher Arithmetic* は、整除性、偶奇による議論、ディオファントス方程式（Diophantine equations）へのすばらしい入門書である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。