解答例

STEP I 1998、第 9 問

力学 ・ 振り子の衝突

> **STEP I 1998、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q9

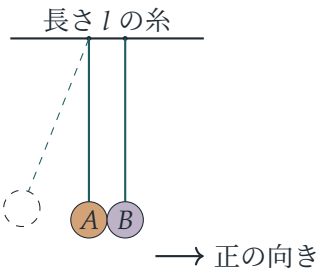
鍵となる考え方

変位はごく小さいので、各球は単振り子（simple pendulum）として単振動（simple harmonic motion）をし、その周期（period）$2\pi\sqrt{l/g}$ は振幅（amplitude）にも速さにもよらない。2 つの振り子は長さが等しいので、最下点での衝突の後には、どんな場合でも両球は半周期後の同じ瞬間に、速度の向きが反転した状態で最下点に戻ってくる。2 回目の衝突がいつどこで起こるかがわかれば、あとは各衝突ごとに運動量の式とニュートンの実験則を 2 行書くだけである。

解答

モデル

A と B を、同じ長さ l の軽く伸び縮みしない糸につるされた質量 m の質点とみなし、空気抵抗は無視する。また衝突は瞬間的であり、撃力（impulse）は水平な中心線（line of centres）に沿ってはたらくものとする。1 回目の衝突における A の運動の向き（A から B へ向かう向き）を正の向きとし、$\omega = \sqrt{g/l}$ とおく。



すべての衝突が最下点で起こる理由

微小振動では、各球は振幅によらず角振動数（angular frequency）ω の単振動をする。したがって、速さ v で最下点を離れた球の水平変位は $\frac{v}{\omega}\sin\omega t$ であり、時間 π/ω（半周期）後には速度 $-v$ で最下点に戻っている。これはどんな v についても成り立つ。

1 回目の衝突は最下点で起こる。B はそこで静止してつり下がっており、A は速さ u でそこに到達するからである。ある衝突が最下点で起こり、その直後の A と B の速度が $p \le q$ であったとする（衝突直後に互いに近づく向きに動くことはありえない）。最下点から測ると、その時刻 t 後の 2 球の間隔は

$$\frac{q}{\omega}\sin\omega t - \frac{p}{\omega}\sin\omega t = \frac{q-p}{\omega}\sin\omega t,$$

であり、これは $0 < t < \pi/\omega$ では正、$t = \pi/\omega$ で 0 となる。よって 2 球がそれより早く出会うことはなく、両方が最下点に戻ったちょうどその瞬間に再び出会う。これがヒントの意味するところである。2 つの振り子は周期が等しいので、つねにそろって最下点に戻ってくるのである。数学的帰納法（induction）により、すべての衝突は最下点で起こり、連続する衝突の間隔は半周期である。

1 回目の衝突

1 回目の衝突直後の A と B の速度をそれぞれ v_A、v_B とする。運動量保存（conservation of momentum）（最下点では糸の張力は鉛直なので、水平方向の撃力を与えない）とニュートンの実験則（Newton's experimental law）より

$$mv_A + mv_B = mu,$$
$$v_B - v_A = eu.$$

辺々加えたり引いたりして、

$$v_A = \tfrac{1}{2}u(1-e), \qquad v_B = \tfrac{1}{2}u(1+e).$$

どちらも ≥ 0 なので、両球とも B の側へ振れていく（$e = 1$ のときは、A はその場で止まり、最下点につり下がったままとなる）。

考えてみよう 2 回目の衝突の直前の速度はどうなっているか？

半周期後、各球は速度の向きが反転した状態で最下点に戻っている。A の速度は $-\frac{1}{2}u(1-e)$、B の速度は $-\frac{1}{2}u(1+e)$ である。B のほうが速いので、B が A に後ろから追いつく。A に対する B の接近の速さは $\frac{1}{2}u(1+e) - \frac{1}{2}u(1-e) = eu$ である。

2回目の衝突

2回目の衝突直後の A と B の速度をそれぞれ w_A、w_B とする。運動量保存より

$$mw_A + mw_B = -\tfrac{1}{2}mu(1-e) - \tfrac{1}{2}mu(1+e) = -mu,$$

であり、ニュートンの実験則（遠ざかる速さは近づく速さ eu の e 倍）より

$$w_B - w_A = e \cdot eu = e^2u.$$

辺々引いたり加えたりして、

$$w_A = -\tfrac{1}{2}u(1+e^2), \qquad w_B = -\tfrac{1}{2}u(1-e^2).$$

したがって、2回目の衝突の直後、A の速さは $\frac{1}{2}u(1+e^2)$ となり、これが示すべきことであった。また B の速さは $\frac{1}{2}u(1-e^2)$ であり、両球とも、A が最初に放された側へ向かって動いている。

検算

- 完全弾性衝突（perfectly elastic）$e=1$ の場合：最終的に A の速さは u、B は静止する。これは正しい。1回目の衝突の後 A は止まり、B が速さ u を得る。そして B が速さ u で戻ってきて、それをすべて A に返すからである。
- $e=0$ の場合：両方の速さが $\frac{1}{2}u$ となる。2球は実質的に一体となり、1回目の衝突の後は速さ $\frac{1}{2}u$ でいっしょに動くので、これも正しい。
- 2回目の衝突後の運動量は $-\frac{1}{2}mu(1+e^2) - \frac{1}{2}mu(1-e^2) = -mu$ であり、最初の mu と逆向きになっている。
- $l = 1\,\mathrm{m}$、初期角度 $0.01\,\mathrm{rad}$ として、実際の（非線形の）振り子2つをシミュレーションした。2回目の衝突は1回目の衝突から 1.0001 半周期後に、最下点から $3\times10^{-6}\,\mathrm{rad}$ 以内で起こり、$e=0.7$ のときの衝突後の速さは $0.745u$ と $0.255u$ で、$\frac{1}{2}(1+e^2)$ および $\frac{1}{2}(1-e^2)$ と一致した。

よくある間違い

- 2回目の衝突の前に両方の速度が反転していることを忘れ、B が静止した A に衝突するものとして扱ってしまう。
- 2回目の衝突で、$e\cdot$(近づく速さ) の代わりに eu を使ってしまう。ここでは近づく速さがたまたま eu なので、遠ざかる速さは e^2u となる。

- 衝突が最下点で起こるのは「球がそこにつり下がっているから」だと述べてしまう。本当の理由は周期が振幅によらないことであり、だからこそ球を引き寄せる量は小さくなければならないのである。

STEP のその先へ

等時性（isochronism、周期が振幅によらないこと）は、振り子については近似的にしか成り立たない。振れ幅が大きくなると周期は長くなり、その厳密な値は楕円積分（elliptic integral）で与えられる。そうなると衝突は最下点からずれていくことになる。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、振り子と衝突の両方が丁寧に扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。