解答例

STEP I 1998、第 8 問

純粋数学 • 2 階の微分方程式

> **STEP I 1998、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q8

鍵となる考え方

流体力学の装いをまとってはいるが、これは純粋な微分方程式（differential equation）の問題である。左辺は導関数の導関数になっているので、2 回積分すればよい。その際、途中で r で割ると定数が対数に変わることに注意する。軸上で速度が有限であるという物理的な要請によって定数の一方が決まり、壁面での滑りなし条件（no-slip condition）によってもう一方が決まる。

解答

一般解

方程式に r を掛けると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right) = -kr.$$

となる。r について 1 回積分すると

$$r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\tfrac{1}{2}kr^2 + A,$$

となる。ここで A は定数である。両辺を r で割る（管の内部で軸から離れたところでは $r > 0$ なので問題ない）と

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\tfrac{1}{2}kr + \frac{A}{r}.$$

となる。もう一度積分し、$r > 0$ であるから $\ln|r|$ ではなく $\ln r$ を用いると

$$\boxed{v = -\tfrac{1}{4}kr^2 + A\ln r + B}$$

を得る。ここで A と B は任意定数である。2 階の方程式であるから、定数が 2 つ現れるのは予想どおりである。

軸の近くでの振る舞い

$r \to 0^+$ のとき、項 $-\frac{1}{4}kr^2$ と B は有界である（それぞれ 0 と B に近づく）が、$\ln r \to -\infty$ である。したがって $A \neq 0$ ならば、$A \ln r$ は（A の符号に応じて）$-\infty$ または $+\infty$ に発散し、ゆえに $|v| \to \infty$ となる。これを避ける唯一の方法は $A = 0$ とすることであり、このとき $v \to B$ となって有限である。

考えてみよう なぜ $A = 0$ でなければならないのだろうか？

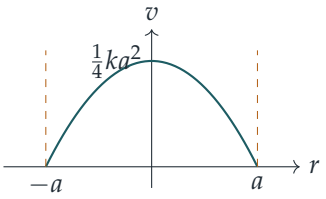
軸 $r = 0$ は流体の内部にあるので、そこでの速さは有限でなければならない。現実の流体が管の中心に沿って無限に速く流れることはない。$\ln r$ を含む解は $r > 0$ において方程式のれっきとした解であるが、この状況では物理的に受け入れられない。（軸が流体に含まれない、同軸の 2 つの円筒の間の流れであれば、この解も許される。）

速度分布

$A = 0$ のとき $v = B - \frac{1}{4}kr^2$ である。$r = a$ で $v = 0$ という条件から $B = \frac{1}{4}ka^2$ となるので

$$\boxed{v = \tfrac{1}{4}k\left(a^2 - r^2\right).}$$

である。速度分布は放物線であり、速さは軸上で最大値 $\frac{1}{4}ka^2$ をとり、壁面で 0 まで減少する。



（図は直径に沿った断面を示しており、壁面を破線で表している。）

流量

与えられた公式に代入すると

$$F = 2\pi \int_0^a r \cdot \tfrac{1}{4}k\left(a^2 - r^2\right) \mathrm{d}r = \frac{\pi k}{2} \int_0^a \left(a^2 r - r^3\right) \mathrm{d}r$$
$$= \frac{\pi k}{2}\left[\frac{a^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^a = \frac{\pi k}{2} \cdot \frac{a^4}{4},$$

となるので

$$\boxed{F = \frac{\pi k a^4}{8}.}$$

である。

検算

- $v = \frac{1}{4}k(a^2 - r^2)$ を元の式に代入する。$r\,v' = -\frac{1}{2}kr^2$ であり、その導関数は $-kr$、これを r で割ると $-k$ となって、確かに成り立つ。
- 平均の速さは $F/(\pi a^2) = \frac{1}{8}ka^2$ であり、最大の速さ $\frac{1}{4}ka^2$ のちょうど半分である。これは放物線状の速度分布についてよく知られた性質である。
- 数値的には、$k = 2$、$a = 1$ のときシンプソンの公式（Simpson's rule）により $F \approx 0.785398$ となり、$\pi/4$ と一致する。

よくある間違い

- 1 回目の積分で積分定数を忘れること。これにより $A\ln r$ の項が失われ、問題文の「ただし〜でない限り」の部分が意味をなさなくなる。
- $-kr$ を積分して $-\frac{1}{2}kr^2$ を得たあと、もう一度積分する前に r で割るのを忘れること。
- F の積分の中の因子 r を落とすこと。半径 r の薄い円環を通る流量は、定数ではなく、その円周 $2\pi r$ に比例する。

STEP のその先へ

作用素 $\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)$ は、r のみの関数に対する円柱座標でのラプラシアン（Laplacian）∇^2 である。したがってこの問題は、実はポアソン方程式（Poisson's equation）$\nabla^2 v = -k$ にほかならない。$\ln r$ を含む解は、点電荷の $1/r$ ポテンシャルの 2 次元版にあたる。結果 $F \propto a^4$ はポアズイユの法則（Poiseuille's law）である。管の半径を半分にすると流量は 16 分の 1 になってしまう。動脈が狭くなることがこれほど重大なのはこのためである。微分方程式の側面については、Boyce と DiPrima による *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。