解答例

STEP I 1998、第 7 問

純粋数学 ・ 等比級数

> **STEP I 1998、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q7

鍵となる考え方

残高を 1 年ごとに追いかけようとしてはいけない。その代わりに、それぞれの預け入れを別々に追うのである。£a の 1 回の預け入れが銀行で k 年分の利息を受けると £ar^k に増え、その合計は等比級数（geometric series）になる。引き出しについては、同じ考え方を逆向きに使う。各引き出しは、引き出されるまで利息を生み続けてきた初期残高の一部によって**まかなわれる**のであり、したがって価値をある 1 つの時点で比較するのである。

解答

据え置き期間後の金額

ρ% の利息により、各年の終わりに残高は $r = 1 + \frac{\rho}{100}$ 倍になる。

預け入れの年に $1, 2, \ldots, m$ と番号をつける。第 k 年の初めに行った預け入れは、第 $k, k+1, \ldots, m$ 年の終わりに利息を受け、その回数は $m - k + 1$ 回である。よって第 m 年の終わりにその価値は ar^{m-k+1} となる。k について足し合わせると、第 m 年の終わりの残高は

$$\begin{aligned} a\left(r^m + r^{m-1} + \cdots + r\right) &= ar\left(1 + r + \cdots + r^{m-1}\right) \\ &= ar\,\frac{r^m - 1}{r - 1}, \end{aligned}$$

である。ここで等比級数の和の公式を用いた（$\rho > 0$ であるから $r \neq 1$ である）。

続く l 年間は入金も出金もないので、これはさらに l 回 r 倍される。したがって期間の

終わりの総額は

$$£a\,\frac{r^{l+1}(r^m-1)}{r-1},$$

となり、求める結果が得られた。この金額を P とおく。

引き出し

最初の引き出しは据え置き期間の直後の年の初めに行われ、それは残高が P である時点である。k 回目の引き出しの直後の残高を B_k とする。すると

$$B_1 = P - b, \qquad B_k = rB_{k-1} - b \quad (k = 2, \ldots, n),$$

が成り立つ。引き出しと引き出しの間に、お金は 1 年分の利息を受けるからである。この漸化式（recurrence）をほどいていくと、

$$\begin{aligned} B_n &= r^{n-1}P - b\left(r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + r + 1\right) \\ &= r^{n-1}P - b\,\frac{r^n - 1}{r-1}. \end{aligned}$$

考えてみよう P にかかる因子が r^n ではなく r^{n-1} であるのはなぜか？

1 回目と n 回目の引き出しの間には年末が $n-1$ 回しかないので、お金が利息を受けるのは $n-1$ 回である。最後の引き出しの後に支払われる利息は関係ない。その時点で口座は空だからである。同様に、j 番目の引き出し（最後から数え、最後のものを $j = 0$ とする）は、n 回目の引き出しまでに r^j 倍される。

n 回目の引き出しの後に口座は空になるので、$B_n = 0$ である。これより

$$r^{n-1}P = b\,\frac{r^n - 1}{r-1}.$$

P を代入すると

$$a\,\frac{r^{l+n}(r^m-1)}{r-1} = b\,\frac{r^n-1}{r-1},$$

となり、したがって

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{r^n - 1}{r^{l+n}\,(r^m - 1)}}$$

この等式を理解する同値な方法として、「現在価値（present value）」をとる方法がある。最初の引き出しの時点で測ると、k 回目の引き出しの価値は b/r^{k-1} であり、これらの価値の合計は P に等しくなければならない：

$$P = b\left(1 + r^{-1} + \cdots + r^{-(n-1)}\right).$$

検算

- $m = n$ ならば答えは $a/b = r^{-(l+n)}$ と簡単になり、$b = ar^{l+n}$ である。これは理にかなっている。k 回目の預け入れと k 回目の引き出しを組にすると、両者のちょうど $m + l = l + n$ 年離れているので、各預け入れがちょうど 1 回の引き出しをまかなうのである。
- $r \to 1$（利息なし）のとき $\dfrac{r^n - 1}{r^m - 1} \to \dfrac{n}{m}$ であるから $a/b \to n/m$、すなわち $ma = nb$ となる。入れたお金と出したお金が等しい。
- $\rho = 5$、$m = n = 10$、$l = 5$、$a = 1000$ のとき、1 年ごとのシミュレーションにより $P \approx 16855.58$ が得られる。公式からは $a/b = 1.05^{-15} \approx 0.48102$、よって $b \approx 2078.93$ となり、この b を用いるとシミュレーション上の口座はちょうど 0 で終わる。さらに、r、l、m、n を無作為に選んだ 500 通りについて、分数を用いた計算機による計算でも両方の公式が厳密に確かめられる。

よくある間違い

- 最初の和で r^{m+1} の代わりに r^m を得てしまう。預け入れは各年の**初め**に行われるので、最後の預け入れでさえ 1 年分の利息を受ける。
- $r^{n-1}P$ の代わりに r^nP と書いてしまう。第 n 年の終わりの利息は、口座が空になった後に来る。

STEP のその先へ

これは年金（annuity）の数学である。支払いを共通の日付に割り引いて（現在価値）比較することは、保険数理（actuarial mathematics）と金融数学の基本原理である。漸化式 $B_k = rB_{k-1} - b$ は 1 階線形差分方程式（first-order linear difference equation）である。その解は特定の定数と r^k の定数倍との和であり、これは 1 階線形微分方程式（first-order linear differential equation）の解き方とまさに対応している。この類似は、大学 1 年次の差分方程式と微分方程式の講義で取り上げられる。この種の問題をさらに知りたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。