解答例

STEP I 1998、第 6 問

純粋数学 ・ 三角関数の漸化式

> **STEP I 1998、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q6

鍵となる考え方

漸化式（recurrence）の各段階では、ある量と余弦（cosine）の平均をとっている。半角の公式（half-angle identity）$\frac{1}{2}(1+\cos\theta) = \cos^2\frac{\theta}{2}$ を使うと、その平均は完全平方になる。そして b_{n+1} の式にある平方根が、その平方を再び取り除く。各項が直前の項を因数として含んでいることに気づけば、一般の規則は容易に推測でき、その確認は数学的帰納法（induction）の帰納段階そのものである。

解答

以下では常に $0 < x < \frac{\pi}{2}$ とする。したがって $k \geq 1$ のとき、どの角 $x/2^k$ も $(0, \frac{\pi}{4})$ に含まれ、その余弦は正である。b_{n+1} の定義における平方根は正の方をとるものとする。

a_2 と b_2 を求める

$1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$ を用いると、

$$a_2 = \tfrac{1}{2}(\cos x + 1) = \cos^2\frac{x}{2}, \qquad b_2 = (a_2 b_1)^{1/2} = \left(\cos^2\frac{x}{2}\right)^{1/2} = \cos\frac{x}{2},$$

となる。最後の等号では $\cos\frac{x}{2} > 0$ を用いた。

a_3 と b_3 を求める

共通因数 $\cos\frac{x}{2}$ をくくり出し、今度は $\theta = \frac{x}{2}$ として再び半角の公式を用いると、

$$a_3 = \tfrac{1}{2}\left(\cos^2\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) = \cos\frac{x}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\left(1+\cos\frac{x}{2}\right) = \cos\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{4}.$$

次に、

$$b_3 = (a_3 b_2)^{1/2} = \left(\cos^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{4}\right)^{1/2} = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4},$$

である。ここで、二つの余弦がともに正であることを用いた。これらが求める二つの式である。

一般の規則

ここまでの項を比べると、

$$b_2 = \cos\frac{x}{2}, \quad b_3 = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}, \qquad a_2 = b_2\cos\frac{x}{2}, \quad a_3 = b_3\cos\frac{x}{4}.$$

b は一つ進むごとに、角を半分にした余弦が一つ増える。また各 a は、対応する b にその最後の余弦をもう一度掛けたものである。そこで、$n \geq 2$ に対して次のように推測する。

$$b_n = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}} = \prod_{k=1}^{n-1}\cos\frac{x}{2^k},$$

$$a_n = b_n\cos\frac{x}{2^{n-1}} = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-2}}\ \cos^2\frac{x}{2^{n-1}}.$$

考えてみよう 推測した式が漸化式を満たすことを確かめるには、正確には何を確認すればよいだろうか？

確認すべきことは二つである。推測が初期値と一致すること、そして a_n と b_n について式が成り立つならば、漸化式から a_{n+1} と b_{n+1} についての式が得られることである。この二つを合わせると、数学的帰納法により、すべての $n \geq 2$ について式が成り立つことがわかる。

初期値。 $n = 2$ のとき、推測した式は $b_2 = \cos\frac{x}{2}$ および $a_2 = \cos^2\frac{x}{2}$ を与え、これは上で求めたものと一致する。

帰納段階。 ある $n \geq 2$ について式が成り立つと仮定する。$\theta = x/2^{n-1}$ とおくと、$x/2^n = \theta/2$ である。このとき

$$a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_n + b_n) = b_n \cdot \tfrac{1}{2}(1 + \cos\theta) = b_n\cos^2\frac{\theta}{2}.$$

b_{n+1} についての推測は $b_n\cos\frac{\theta}{2}$（角 $x/2^n$ の余弦が一つ増えたもの）であるから、これは $a_{n+1} = b_{n+1}\cos\frac{x}{2^n}$ を意味し、a_{n+1} について推測した形になっている。次に、

$$b_{n+1} = (a_{n+1}b_n)^{1/2} = \left(b_n^2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{1/2} = b_n\cos\frac{x}{2^n} = \prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k},$$

である。ここで正の平方根をとったが、b_n と $\cos\frac{x}{2^n}$ はともに正なので、これは正当である。これは b_{n+1} について推測した形であるから、漸化式の二つの等式はともに満たされ、すべての $n \geq 2$ について式が成り立つ。

実は、空積（empty product）を 1 と定めれば、これらの式は $b_1 = 1$ および $a_1 = \cos x$ も与えるので、$n = 1$ から成り立つ。

検算

- $x = \frac{\pi}{3}$ とする。漸化式を直接計算すると $a_3 \approx 0.808013$、$b_3 \approx 0.836516$ となり、$\cos\frac{\pi}{6}\cos^2\frac{\pi}{12}$ と $\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{12}$ も同じ値を与える。
- $(0, \frac{\pi}{2})$ 内の無作為な 2000 個の x について、$n = 24$ まで漸化式と積の公式を比較したところ、誤差 10^{-15} 以内で一致した。
- $x \to 0$ のとき、どの余弦も 1 に近づき、a_1 と b_1 も 1 に近づく。したがってすべての項が 1 に近づき、これは当然の結果である。

よくある間違い

- $\cos\theta > 0$ である理由を述べずに $\sqrt{\cos^2\theta} = \cos\theta$ と書くこと。ここでは、どの角も $(0, \frac{\pi}{4})$ に含まれるので成り立つ。
- $n = 2$ と 3 から規則を推測しただけで終えてしまうこと。問題は漸化式を満たすことの確認を求めているので、帰納段階が必要である。

STEP のその先へ

b_n に $\sin\frac{x}{2^{n-1}}$ を掛け、$2\sin\phi\cos\phi = \sin 2\phi$ を繰り返し用いると、$b_n = \dfrac{\sin x}{2^{n-1}\sin(x/2^{n-1})}$ が得られる。これは $n \to \infty$ のとき $\dfrac{\sin x}{x}$ に収束（converge）する（$x = 1$ のとき、漸化式は数十回の反復で 0.841471 を与える）。$x = \frac{\pi}{2}$ とすると、$2/\pi$ に対するヴィエト（Viète）の無限積（infinite product）が得られる。この「算術平均をとってから幾何平均をとる」という手続きは、ガウス（Gauss）の算術幾何平均（arithmetic–geometric mean）の親戚であり、数列が収束することを証明し、その極限を求める最初の例としてよいものである。数列の極限についての丁寧な扱いについては、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門書）を参照されたい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。