解答例

STEP I 1998、第 5 問

純粋数学 ・ 複素数と回転

> **STEP I 1998、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q5

鍵となる考え方

どちらの小問も、複素数（complex number）の代数に計算を任せるという発想に基づいている。小問 (i) では、正六角形（regular hexagon）のある頂点から次の頂点へ移ることは中心のまわりの 60° の回転（rotation）であり、原点のまわりの回転は絶対値（modulus）1 の複素数を掛けることにほかならない。そこで Q を基準にして考える。小問 (ii) では、複素数が実数であるのはその虚部（imaginary part）が 0 であるときに限るので、各分母を実数化（realise the denominator）し、虚部を 0 とおく。

解答

小問 (i)

中心を基準にして考える。Q から A へのベクトルは

$$A - Q = (10 + 2i) - (4 + 6i) = 6 - 4i.$$

である。正六角形の 6 つの頂点は Q を中心とする円周上に等間隔に並んでいるので、角 AQB は $360° / 6 = 60°$ であり、QB の長さは QA の長さに等しい。**時計回り**に進むことは $-60°$ だけ回転すること、すなわち

$$\mathrm{e}^{-i\pi/3} = \cos\tfrac{\pi}{3} - i\sin\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,i.$$

を掛けることである。

? **考えてみよう** なぜ A そのものではなく $A - Q$ に掛けるのだろうか？

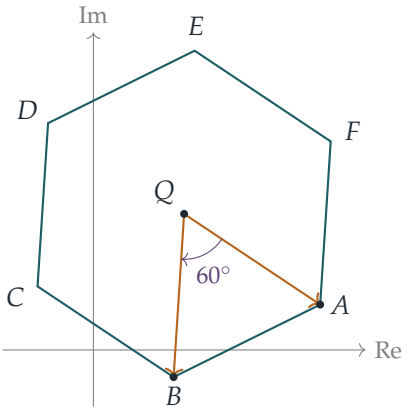
$e^{-i\pi/3}$ を掛けると**原点**のまわりに回転する。Q のまわりに回転するには、Q を原点へ移し（Q を引き）、回転してから、元へ戻す（Q を足す）。したがって

$$\begin{aligned} B - Q &= (6-4i)\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,i\right) \\ &= 3 - 3\sqrt{3}\,i - 2i + 2\sqrt{3}\,i^2 \\ &= (3-2\sqrt{3}) - (2+3\sqrt{3})\,i, \end{aligned}$$

であり、$Q = 4+6i$ を加えると

$$\boxed{B = (7-2\sqrt{3}) + (4-3\sqrt{3})\,i} \approx 3.536 - 1.196\,i.$$

を得る。



図から向きが正しいことが確かめられる。Q の右下にある A から時計回りに進むと、次の頂点は Q のほぼ真下にあり、求めた B もそうなっている。

小問 (ii)

$(1+ki)(1-ki) = 1+k^2$ を用いて、分母と分子に共役複素数（conjugate）を掛け、各分母を実数化する：

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}, \qquad \frac{1}{1+2i} = \frac{1-2i}{5}, \qquad \frac{1}{1+3i} = \frac{1-3i}{10}.$$

a、b、c は実数なので、式全体の虚部は

$$-\frac{a}{2} - \frac{2b}{5} - \frac{3c}{10} = -\frac{5a+4b+3c}{10}.$$

である。式が実数となるのはこの虚部が 0 のときに限るので、求める条件は

$$\boxed{5a+4b+3c = 0}.$$

である。（$-5a-4b-3c=0$ のように、0 でない整数倍をしたものも同じ条件である。）実際、虚部を正確に求めたので、この条件は十分条件（sufficient condition）であり、かつ必要条件（necessary condition）でもある。

検算

- 小問 (i) において、$|A-Q| = |6-4i| = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ である。求めた B について $|B-Q|^2 = (3-2\sqrt{3})^2 + (2+3\sqrt{3})^2 = 21 - 12\sqrt{3} + 31 + 12\sqrt{3} = 52$ となるので、B は正しい円周上にある。また数値的にも $|B-A| \approx 7.211 = |A-Q|$ であり、QAB が正三角形（equilateral triangle）であることと合っている。
- 小問 (ii) において、$a = 3$、$b = 0$、$c = -5$（$5a + 4b + 3c = 0$ を満たす）を試すと $\frac{3(1-i)}{2} - \frac{5(1-3i)}{10} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + \left(-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right) i = 1$ となり、確かに実数である。
- $c = -(5a+4b)/3$ を満たす無作為な 3 つ組 10 000 個について数値的に確かめたところ、虚部はすべて 0 であった。

よくある間違い

- 反時計回りに回転する（$e^{i\pi/3}$ を掛ける）と $(7 + 2\sqrt{3}) + (4 + 3\sqrt{3})i$ となるが、これは頂点 F であって B ではない。
- A を Q のまわりではなく原点のまわりに回転してしまう。
- 小問 (ii) で**実部**を 0 とおいてしまう。あるいは、このように虚部を読み取るには a、b、c が実数でなければならないことを忘れる。

STEP のその先へ

$e^{i\theta}$ を掛けることは回転であり、写像 $z \mapsto \alpha z + \beta$ は回転と拡大を行った後に平行移動（translation）を施すものである。これらは、複素解析（complex analysis）の最初の講義で学ぶメビウス変換（Möbius transformation）の最も簡単な例である。原点を中心とする正多角形の頂点が 1 の累乗根（roots of unity）の z_0 倍であるという事実は、代数学と幾何学の多くの話題の出発点となる。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、複素数の乗法をこのように幾何学的に捉える見方を見事に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。