解答例

STEP I 1998、第 4 問

純粋数学 • 制約付き最適化

> **STEP I 1998、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q4

鍵となる考え方

円に内接する（inscribed）長方形では対角線が直径になるので、辺 a と b はピタゴラスの定理（Pythagoras' theorem）によって結びつけられ、a^2+b^2 は一定である。すると問題はすべて、a^2+b^2 を一定に保ったときに $a+b$、a^2+b^2、a^3+b^3 がどう振る舞うかという問いに帰着する。$n=2$ の場合が分かれ目である。それより小さいときは正方形が最良であり、ちょうどその値ではすべてが同じ値をとり、それより大きいときは正方形が最下位になる。

解答

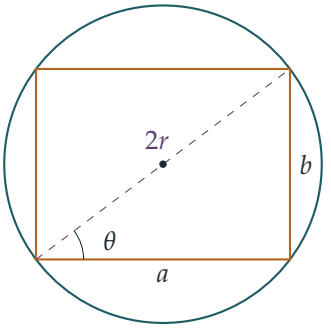
円の半径を r とし、長方形の辺を $a,b>0$ とする。長方形の各角は直角なので、直径を見込む角である（半円に対する円周角）。したがって各対角線は直径であり、

$$a^2+b^2=(2r)^2=4r^2.$$

逆に、$a^2+b^2=4r^2$ を満たす任意の $a,b>0$ に対して、頂点がすべて円周上にあるように円に収まる長方形が得られる。そこで次のようにおくと便利である。

$$a=2r\cos\theta,\qquad b=2r\sin\theta,\qquad 0<\theta<\tfrac{\pi}{2},$$

ここで θ は対角線と長さ a の辺のなす角である。



周長

周長（perimeter）は $P = 2(a+b)$ である。$(a-b)^2 \geq 0$ より $2ab \leq a^2 + b^2$ であるから、

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leq 2(a^2+b^2) = 8r^2,$$

であり、等号が成り立つのは $a = b$ のとき、かつそのときに限る。$a + b > 0$ なので、これより $a + b \leq 2\sqrt{2}\,r$、すなわち

$$P \leq 4\sqrt{2}\,r,$$

が得られ、値 $4\sqrt{2}\,r$ はちょうど $a = b = \sqrt{2}\,r$ のときに達成される。よって周長が最大の長方形は正方形であり、題意は示された。

$n = 2$ の場合

4 辺の 2 乗の和は

$$2(a^2+b^2) = 8r^2,$$

であり、長方形によらない。したがって内接する長方形はすべて同じ値を与える。どれかを選ぶ理由はなく、特に正方形が他より優れているわけでもない。

$n = 3$ の場合

次に $S = 2(a^3+b^3)$ を考える。各辺は直径より短いので $0 < a < 2r$ かつ $0 < b < 2r$ であり、$a^3 < 2r\,a^2$、$b^3 < 2r\,b^2$ が成り立つ。辺々加えると

$$S = 2(a^3+b^3) < 2 \cdot 2r(a^2+b^2) = 16r^3.$$

一方、$\theta \to 0$ のとき（$a \to 2r$、$b \to 0$ となる細長い長方形）、$S \to 2(2r)^3 = 16r^3$ である。したがって S はいくらでも $16r^3$ に近づけられるが、決して到達しない。つまり**S を最大にする長方形は存在しない**。$16r^3$ を達成する唯一の「図形」は、直径を 2 回なぞった退化した（degenerate）ものであり、これは長方形ではない。

考えてみよう では、正方形はどうなったのだろうか？

正方形は最良から最悪へと転じたのである。$f(\theta) = \cos^3\theta + \sin^3\theta$ とおくと $S = 16r^3 f(\theta)$ であり、

$$f'(\theta) = -3\cos^2\theta\sin\theta + 3\sin^2\theta\cos\theta = 3\sin\theta\cos\theta\,(\sin\theta - \cos\theta).$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ において因数 $\sin\theta\cos\theta$ は正であり、$\sin\theta - \cos\theta$ は $\theta < \frac{\pi}{4}$ で負、$\theta > \frac{\pi}{4}$ で正である。よって f は減少したのち増加し、正方形（$\theta = \frac{\pi}{4}$）が**最小値**

$$S_{\min} = 16r^3\left(2\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = 8\sqrt{2}\,r^3.$$

を与える。まとめると、$n = 3$ のとき S の値は区間 $[8\sqrt{2}\,r^3,\ 16r^3)$ を埋め尽くす。正方形が最小を与え、最大を与える長方形は存在しない。

同じことはすべての $n > 2$ について起こる。$\cos\theta$ と $\sin\theta$ はともに 0 と 1 の間に厳密に収まるので、$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ において $\cos^n\theta + \sin^n\theta < \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ が成り立ち、上限 $2(2r)^n$ には長方形を押しつぶすことでしか近づけない。

検算

- $r = 1.7$ として θ を $(0, \frac{\pi}{2})$ の範囲で数値的に走査した。周長は $\theta = \frac{\pi}{4}$ で最大値 $4\sqrt{2}\,r \approx 9.617$ をとる。2 乗の和は常に $8r^2 = 23.12$ である。3 乗の和は $16r^3 \approx 78.61$ 付近から正方形での $8\sqrt{2}\,r^3 \approx 55.58$ まで減少したのち再び増加し、78.61 には決して達しない。
- 簡単な確認：単位円に内接する $\sqrt{2}\times\sqrt{2}$ の正方形の周長は $4\sqrt{2} \approx 5.66$ であるが、1.9×0.62 の長方形（ほぼ直径）の周長は約 5.04 である。

よくある間違い

- $n = 3$ のときの最大値は「$\theta = 0$ で」$16r^3$ である、と述べてしまう。それは線分であって長方形ではないので、最大値は存在しない。そのことを明言し、厳密な不等式を正当化しなければならない。
- $n = 3$ のときに停留点（stationary point）$\theta = \frac{\pi}{4}$ を見つけ、その性質を確かめずに最大値と呼んでしまう。

STEP のその先へ

$n = 3$ の場合は、**上限**（supremum）と**最大値**（maximum）の違いに初めて触れる例である。開区間上の連続関数は上限・下限に到達するとは限らない。最大値・最小値定理（extreme value theorem）が有界閉区間を要求するのはまさにこのためである。$n = 2$ での切り替わりは、異なる p について $\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{1/p}$ を比較するべき平均不等式（power-mean inequalities）の一例である。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、上限と最大値・最小値定理を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。