解答例

STEP I 1998、第 3 問

純粋数学 ・ 真偽を判定する証明

> **STEP I 1998、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q3

鍵となる考え方

小問ごとに必要な道具が異なり、まず各主張が真か偽かを見極めることが最初の仕事である。「真」であれば、すべての場合を尽くす証明が必要である。「偽」であれば、反例（counterexample）を一つ挙げるか、条件を満たす対象が存在し得ないことを示す議論を与えればよい。(i) は対数（logarithm）をとることで、(ii) はうまく選んだ θ の値一つで、(iii) は θ が大きいときの多項式（polynomial）の振る舞いで、(iv) は完全平方（perfect square）で決着がつく。

解答

小問 (i)：真

$a > 0$ であるから、$a = \mathrm{e}^{\ln a}$ と書ける。すると

$$a^{\ln b} = \left(\mathrm{e}^{\ln a}\right)^{\ln b} = \mathrm{e}^{\ln a \,\ln b},$$
$$b^{\ln a} = \left(\mathrm{e}^{\ln b}\right)^{\ln a} = \mathrm{e}^{\ln b \,\ln a}.$$

乗法は可換であるから指数は等しく、したがってすべての $a, b > 0$ に対して $a^{\ln b} = b^{\ln a}$ が成り立つ。（同値な言い方をすれば、両辺はともに正で、対数がどちらも $\ln a \ln b$ に等しい。）

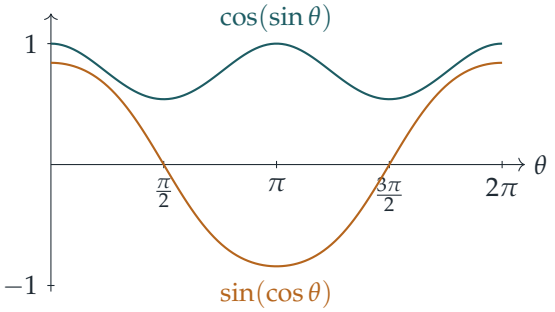
小問 (ii)：偽

反例は一つで十分である。$\theta = 0$ とすると

$$\cos(\sin 0) = \cos 0 = 1, \qquad \sin(\cos 0) = \sin 1.$$

$0 < 1 < \frac{\pi}{2}$ であるから $0 < \sin 1 < 1$（実際 $\sin 1 \approx 0.841$）であり、両辺は一致しない。よってこの主張は偽である。

実は両辺は**決して**等しくならない。グラフを見ると、$\cos(\sin\theta)$ は常に $\sin(\cos\theta)$ より上にある。



これを証明するには（問題を解くうえでは不要であるが）、$\sin(\cos\theta) \le \sin|\cos\theta| = \cos\left(\frac{\pi}{2} - |\cos\theta|\right)$ および $\cos(\sin\theta) = \cos|\sin\theta|$ に注目する。$|\sin\theta|$ と $\frac{\pi}{2} - |\cos\theta|$ はともに余弦が減少する区間 $[0, \frac{\pi}{2}]$ に属し、さらに $|\sin\theta| + |\cos\theta| \le \sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$ であるから $|\sin\theta| < \frac{\pi}{2} - |\cos\theta|$ である。したがって、すべての θ に対して $\cos(\sin\theta) > \sin(\cos\theta)$ が成り立つ。

小問 (iii)：偽

P を任意の多項式とする。ある実数 θ に対して $|\mathrm{P}(\theta) - \cos\theta| > 10^{-6}$ となることを、二つの場合に分けて示す。

P が定数の場合。 $\mathrm{P}(\theta) = c$ とする。$\cos\theta$ がそれぞれ 1 と -1 になる $\theta = 0$ と $\theta = \pi$ を用いると、三角不等式（triangle inequality）より

$$|c-1| + |c+1| \ge |(c+1) - (c-1)| = 2,$$

となる。よって $|c-1|, |c+1|$ の少なくとも一方は 1 以上であり、これは 10^{-6} よりはるかに大きい。

P が $n \ge 1$ 次の場合。 $a_n \ne 0$ として $\mathrm{P}(\theta) = a_n\theta^n + \cdots + a_0$ とする。$\theta \ne 0$ のとき

$$\mathrm{P}(\theta) = a_n\theta^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n\theta} + \cdots + \frac{a_0}{a_n\theta^n}\right),$$

であり、$\theta \to \infty$ のとき括弧の中は 1 に近づき、一方で $|a_n\theta^n| \to \infty$ である。よって $|\mathrm{P}(\theta)| \to \infty$ となり、$|\mathrm{P}(\theta)| > 2$ を満たす θ を選ぶことができる。その θ に対しては、$|\cos\theta| \le 1$ より

$$|\mathrm{P}(\theta) - \cos\theta| \ge |\mathrm{P}(\theta)| - |\cos\theta| > 2 - 1 = 1 > 10^{-6}.$$

いずれの場合も不等式はどこかで成り立たなくなるので、そのような多項式は存在しない。

> **考えてみよう** しかし、$\cos\theta$ のマクローリン級数（Maclaurin series）は多項式のような和であり、いくらでも近づけることができる。それを途中で打ち切ったものではなぜうまくいかないのだろうか。

マクローリン級数を途中で打ち切ったものは、十分多くの項をとれば、固定された任意の有界区間上では確かに $\cos\theta$ との差が 10^{-6} 以内に**収まる**。しかしこの主張が求めているのは、**すべての実数** θ に対して通用する一つの多項式である。定数でない多項式はいずれ $\pm\infty$ へ発散してしまうのに対し、$\cos\theta$ は $[-1,1]$ に閉じ込められたままである。主張を偽にしているのは「すべての実数 θ に対して」という一句なのである。

小問 (iv)：真

$x>0$ のとき

$$x^4+3+x^{-4}-5=x^4-2+x^{-4}=\left(x^2-x^{-2}\right)^2\geq 0,$$

である。実数の平方は非負だからである。したがって、すべての $x>0$ に対して $x^4+3+x^{-4}\geq 5$ が成り立ち、等号が成り立つのは $x^2=x^{-2}$、すなわち $x=1$ のときに限る。（別解として、相加平均・相乗平均の不等式（AM–GM inequality）より $x^4+x^{-4}\geq 2\sqrt{x^4\cdot x^{-4}}=2$ が得られる。）

まとめ：(i) 真、(ii) 偽、(iii) 偽、(iv) 真。

検算

- (i)：$a=2, b=3$ のとき、$2^{\ln 3}$ と $3^{\ln 2}$ はともに約 2.141 である。無作為に選んだ正の a,b についても、相対誤差約 10^{-15} の範囲で一致した。
- (ii)：θ を一周期にわたって標本抽出したところ、$\cos(\sin\theta)-\sin(\cos\theta)$ は約 0.107 を下回ることがなかった。
- (iii)：cos の 20 次のマクローリン多項式は $\theta=1$ では正確であるが、$\theta=10$ では約 7.5、$\theta=30$ では約 10^{11} ずれる。
- (iv)：細かい格子点上で調べると、x^4+3+x^{-4} の最小値は $x=1$ における 5 である。

よくある間違い

- いくつかの値を確かめただけで偽の主張を「証明」してしまったり、式変形の誤りによって真の主張を「反証」してしまったりする。書き始める前に、各小問が真か偽かを見極めること。
- (iii) で定数多項式を忘れる。「無限大に発散する」という議論には次数が 1 以上であることが必要である。
- (iii) でテイラー級数（Taylor series）を、どこでも通用する多項式として持ち出す。実際には通用しない。

STEP のその先へ

小問 (iii) は、ワイエルシュトラス（Weierstrass）の近似定理（Weierstrass approximation theorem）と対照をなす。この定理によれば、任意の**有界閉**区間上で、すべての連続関数は多項式によって望むだけの精度で一様に近似できる。実数直線全体での一様近似が不可能なのは、まさに上で述べた増大の議論のためである。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）では、ワイエルシュトラスの定理と一様収束（uniform convergence）が論じられている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。