解答例

STEP I 1998、第 2 問

純粋数学 ・ 置換積分

> **STEP I 1998、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q2

鍵となる考え方

扱いにくい式 $(x^2+1)^{1/2}+x$ が f の中に入っているので、この式全体を t とおくのが自然な一手である。意外なのは、この置換（substitution）が容易に逆に解けることである。根号を一方の辺に分離してから両辺を 2 乗すると x^2 の項が消え、x が t の簡単な関数として表される。最初の恒等式（identity）が得られれば、2 つ目の積分は $\mathrm{f}(t)=t^{-3}$ とした特別な場合にすぎない。

解答

変数変換

次のようにおく。

$$t=(x^2+1)^{1/2}+x.$$

x が 0 から ∞ まで動くとき、$(x^2+1)^{1/2}$ と x はどちらも増加するので、t は狭義単調増加（strictly increasing）であり、$x=0$ のとき $t=1$ から始まり、$x\to\infty$ のとき ∞ に発散する。したがって、この置換は $[0,\infty)$ から $[1,\infty)$ への一対一（one-to-one）の写像であり、新しい積分区間の端は 1 と ∞ である。

> ? **考えてみよう** x を t で表し直すにはどうすればよいか。

平方根を分離して 2 乗する。$t-x=(x^2+1)^{1/2}$ より

$$t^2-2tx+x^2=x^2+1 \quad\Longrightarrow\quad x=\frac{t^2-1}{2t}=\frac{1}{2}(t-t^{-1}),$$

が得られる。ここで $t\geq 1$ なので t で割ってよい。（2 乗すると余分な解が紛れ込むこ

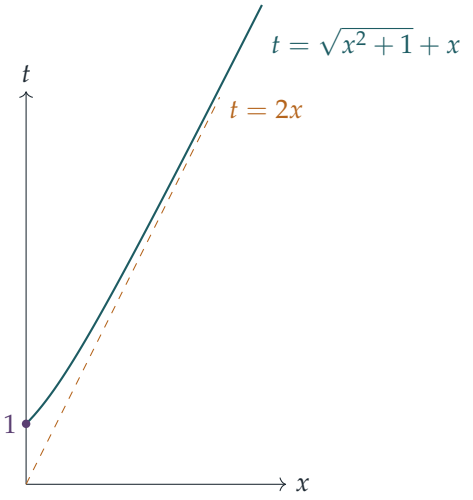
とがあるが、ここでは $t - x = (t + t^{-1})/2 > 0$ なので、2乗した根号の値は確かに正である。）微分すると

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}(1 + t^{-2}).$$

よって

$$\int_0^\infty \mathrm{f}((x^2+1)^{1/2} + x)\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \mathrm{f}(t) \cdot \frac{1}{2}(1 + t^{-2})\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_1^\infty (1 + t^{-2})\mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t,$$

となり、これが求める恒等式である。



この図から、t は1から着実に増加しており、値域のどの部分も2度覆われることはないとわかる。

最後の小問

$\mathrm{f}(t) = t^{-3}$ とする。恒等式の左辺はちょうど求めたい積分になるので

$$\begin{aligned}\int_0^\infty ((x^2+1)^{1/2} + x)^{-3}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_1^\infty (t^{-3} + t^{-5})\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left[-\tfrac{1}{2}t^{-2} - \tfrac{1}{4}t^{-4}\right]_1^\infty \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8},\end{aligned}$$

となり、題意が示された。t^{-3} と t^{-5} は $[1, \infty)$ 上で積分可能なので、どちらの広義積分（improper integral）も収束（convergence）する。

考えてみよう この置換をもっとすっきりと理解する方法はあるだろうか。

ある。$x = \sinh\theta$ とおけばよい。すると $(x^2+1)^{1/2} = \cosh\theta$ なので $t = \cosh\theta + \sinh\theta = \mathrm{e}^{\theta}$ となる。先ほどの式 $x = \frac{1}{2}(t - t^{-1})$ は、実は $\sinh\theta = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\theta} - \mathrm{e}^{-\theta})$ が姿を変えたものにほかならない。

検算

- $x = 0$ のとき $t = 1$ であり、$x = \frac{1}{2}(1-1) = 0$ となるので、逆の式と一致する。$x = \frac{3}{4}$ のとき $t = \frac{5}{4} + \frac{3}{4} = 2$ であり、$\frac{1}{2}(2 - \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$ となる。
- x が大きいとき $t \approx 2x$ なので、最後の小問の被積分関数（integrand）は $(2x)^{-3}$ のように振る舞い、積分は確かに収束する。
- 数値的には、もとの積分にシンプソン（Simpson）の公式を適用すると 0.375000 となり、$\frac{3}{8}$ と一致する。最初の小問の恒等式も、$\mathrm{f}(t) = \mathrm{e}^{-t}$（両辺とも 0.258187）と $\mathrm{f}(t) = 1/(1+t^4)$（両辺とも 0.188387）について数値的に確かめられる。

よくある間違い

- 積分区間の端を変え忘れること。下端は $t = 0$ ではなく $t = 1$ になる。
- $\mathrm{d}t$ を x で表してから x を消去するのに苦労すること。先に x を t で表し、それを微分するほうがはるかに簡単である。

STEP のその先へ

この恒等式は単調（monotonic）な写像による変数変換についての主張であり、解析学では、広義積分の場合には $[0, X]$ 上の積分の極限をとることでこれが正当化される。この置換そのものは sinh の逆関数（inverse function）である。すなわち $\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = \operatorname{arsinh} x$ であり、このために t が $\mathrm{e}^{\operatorname{arsinh} x}$ となるのである。広義積分と置換積分の厳密な扱いについては、Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。