解答例

STEP I 1998、第 14 問

確率・統計 ・ 幾何的確率

> **STEP I 1998、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q14

鍵となる考え方

硬貨がどこに落ちたかについての情報は、すべてその**中心**がどこに落ちたかに集約される。盤面は規則的な模様をしているので、中心は 2×2 の正方形 1 つの上に一様分布（uniformly distributed）するとみなしてよい。すると、それぞれの結果はその正方形内の領域に対応する。「線をまたぐ」や「交点を覆う」という条件を、中心から線や頂点までの距離に関する条件に書き換えれば、確率は面積になる。その面積は a の二次関数（quadratic）であり、これを最大化すればよい。

解答

税が 2 倍になる確率

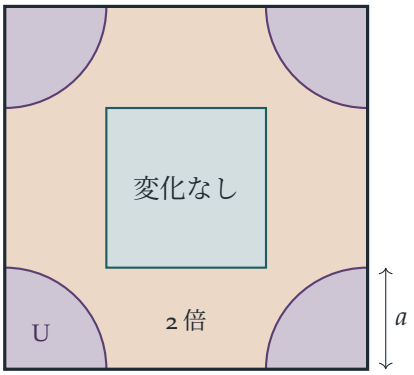
硬貨の中心は、格子の正方形の 1 つに一様ランダムに落ちるとモデル化する。盤面は十分大きいので端の影響（edge effects）は無視でき、どの正方形も同じに見える。この正方形が $[0,2] \times [0,2]$ となり、格子線がその辺に沿うように座標を設定する。

中心から最も近い縦線までの距離を U、最も近い横線までの距離を V とする。x 座標は $[0,2]$ 上の一様分布に従うので、$U = \min(x, 2-x)$ は $[0,1]$ 上の一様分布に従う。同様に V も $[0,1]$ 上の一様分布に従い、x と y が独立（independent）であるから U と V も独立である。したがって (U,V) は単位正方形 $[0,1]^2$ 上に一様に分布し、確率はこの正方形内の面積にほかならない。

- 硬貨がどの線もまたがないのは、ちょうど $U > a$ かつ $V > a$ のときである。その確率は $(1-a)^2$ である。

▶ 硬貨が交点を覆うのは、正方形の最も近い頂点が中心から距離 a 以内にあるとき、すなわち $U^2 + V^2 < a^2$ のときである。$a < 1$ なので、この四分円は $[0,1]^2$ の内部に完全に収まり、確率は $\frac{1}{4}\pi a^2$ となる。

この 2 つの事象は排反（disjoint）である。硬貨が交点を覆うならば、その交点を通る線を必ずまたいでいるからである。（硬貨がちょうど線に接するような境界の場合は確率 0 なので、$<$ と $\leq$ のどちらを用いても構わない。）



図は 1 つの正方形内における中心の取りうる位置を示している。青緑の部分（どの線もまたがない）と紫の部分（交点を覆う。1 つの頂点に U と記した）では税は変わらず、琥珀色の部分では税が 2 倍になる。

よって、税が 2 倍になる確率は

$$\begin{aligned} p(a) &= 1 - (1-a)^2 - \tfrac{1}{4}\pi a^2 \\ &= 2a - \left(1 + \frac{\pi}{4}\right) a^2. \end{aligned}$$

である。

税の最大化

税収を最大にするには、2 倍になる確率をできるだけ大きくしたいので、$0 < a < 1$ の範囲で $p(a)$ を最大化する。これは最高次の係数（leading coefficient）が負の二次関数であり、

$$p'(a) = 2 - 2\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) a = 0 \iff a = \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)^{-1}.$$

となる。この値は $\frac{4}{4+\pi} \approx 0.560$ であり、確かに $(0,1)$ に含まれる。さらに $p''(a) < 0$ であるから、これが最大値を与える。これで示すべきことが示された。この値を a^* と書くと $(1 + \frac{\pi}{4})a^{*2} = a^*$ が成り立つので、最大値は

$$p_{\max} = 2a^* - a^* = a^* = \frac{4}{4+\pi}.$$

である。

n 年後の税の期待値

> **考えてみよう** 毎年の増加倍率の期待値が $2p$ ではなく $1+p$ になるのはなぜか。

税が 2 倍にならない年には税はそのまま据え置かれるので、0 倍ではなく 1 倍される。k 年目の倍率を M_k とすると、確率 p で $M_k = 2$、確率 $1-p$ で $M_k = 1$ である。したがって

$$\mathrm{E}(M_k) = 2p + (1-p) = 1 + p = 1 + \frac{4}{4+\pi} = \frac{8+\pi}{4+\pi}.$$

となる。毎年の投げ方は互いに独立であると仮定する。n 年後の税は（1 から始めて）ヤク 1 頭あたり $T_n = M_1 M_2 \cdots M_n$ スリヒング（Slihings）であり、独立な確率変数（random variable）の積の期待値（expectation）はそれぞれの期待値の積に等しいから、

$$\mathrm{E}(T_n) = \mathrm{E}(M_1)\,\mathrm{E}(M_2)\cdots\mathrm{E}(M_n) = \left(\frac{8+\pi}{4+\pi}\right)^n,$$

となり、示すべきことが示された。

検算

- $a \to 0$ のとき硬貨はほとんど線に触れず、$a = 1$ のときは必ず線をまたぐので、$p(1) = 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0.215$ は頂点の円板を避ける確率になる。どちらも公式と一致し、最大値はその間にある。
- 400 000 個のランダムな中心を用いたシミュレーションでは、$a = 0.56$ において $p \approx 0.5620$ となり、公式の値 0.5601 と比べて妥当である。a を細かく探索すると、最大値をとるのは $a \approx 0.5601 = 4/(4+\pi)$ である。
- $p = 4/(4+\pi)$ として毎年の倍増をシミュレーションすると、3 年後の税の平均は約 3.805 となり、$\left(\frac{8+\pi}{4+\pi}\right)^3 \approx 3.797$ と比べて妥当である。

よくある間違い

- 「交点を覆う」面積を「線をまたがない」面積から引いてしまったり、二重に数えたりする。2 つの事象は排反であり、どちらも 1 から引く。
- 各頂点で円板全体の面積 πa^2 を用い、そのうち正方形内にあるのは四分の一だけであること（言い換えれば、各頂点の円板は 4 つの正方形で共有されていること）

を忘れる。

- 2 倍にならない年には税が変わらないことを忘れて、税の期待値を $(2p)^n$ と書いてしまう。

STEP のその先へ

これはビュフォン（Buffon）の針の問題（Buffon's needle problem）の親戚である。ランダムに置かれた物体を基本領域（fundamental region）内のランダムな点に帰着させ、確率を面積として扱う。この考え方は**幾何確率**（geometric probability）と積分幾何学（integral geometry）の出発点であり、針を投げて π を推定するといった驚くべき結果をもたらす。最後の小問では、独立な確率変数の期待値は掛け算できるという事実を用いたが、これは金融や個体群生物学における乗法的成長モデルの基礎となっている。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、この両方の考え方を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。