解答例

STEP I 1998、第 12 問

確率・統計 ・ 数え上げと独立性

STEP I 1998、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/98-s1-q12

鍵となる考え方

ここで行うことはすべて数え上げである。解が全部でいくつあるか、そして X が与えられた値に等しい解がいくつあるかがわかれば、各確率（probability）は二つの個数の比になる。独立性（independence）については、極端な場合を調べるのが最も手早い判定法である。すなわち、同時確率（joint probability）が周辺確率（marginal probability）の積に等しくなりえないような値の組を一つ見つければよい。最後の小問では、「XYZ が 5 で割り切れる」とは「X, Y, Z の少なくとも一つが 5 で割り切れる」ということであり、これは包除原理（inclusion–exclusion）を用いるべき場面である。

解答

解の個数を数える

$X = x$ を固定すると（ただし $0 \le x \le 20$）、Y は $0, 1, \ldots, 20 - x$ のいずれの値もとることができ、そのとき $Z = 20 - x - Y$ は一意に定まり、しかも非負である。したがって $X = x$ となる解はちょうど $21 - x$ 個あり、解の総数は

$$N = \sum_{x=0}^{20} (21 - x) = 21 + 20 + \cdots + 1 = \frac{21 \cdot 22}{2} = 231.$$

である（これは「星と棒」（stars and bars）による数え方 $\binom{22}{2}$ に一致する。20 個の星と 2 本の棒を一列に並べればよい）。各解の確率は $1/231$ であり、

$$\mathrm{P}(X = x) = \frac{21 - x}{231}, \qquad x = 0, 1, \ldots, 20.$$

となる。対称性により、Y（および Z）も同じ分布に従う。

X と Y は独立か

独立ではない。$X = 20$ と $Y = 20$ を考える。それぞれの事象は単独では起こりうる：

$$\mathrm{P}(X = 20) = \mathrm{P}(Y = 20) = \frac{1}{231} > 0,$$

しかし $X + Y \leq 20$ であるから、両者が同時に起こることはない。よって

$$\mathrm{P}(X = 20,\ Y = 20) = 0 \neq \frac{1}{231^2} = \mathrm{P}(X = 20)\,\mathrm{P}(Y = 20),$$

であり、X と Y は独立ではない。直観的には、X の値が大きいと Y の入る余地が少なくなるということである。

> **考えてみよう** 「$X + Y \leq 20$ だから明らかに従属である」と言うだけでは不十分なのだろうか。

そのような制約に着目するのは正しい直観である。しかし独立性は確率についての厳密な主張であるから、その正当化には $\mathrm{P}(X = x, Y = y) \neq \mathrm{P}(X = x)\mathrm{P}(Y = y)$ となる値の組を一つ示す必要がある。反例（counterexample）は一つあれば十分であり、極端な組 $(20, 20)$ を選べば計算は自明になる。

X が 5 で割り切れる場合

範囲内にある 5 の倍数は $X = 0, 5, 10, 15, 20$ であり、それぞれ $21, 16, 11, 6, 1$ 個の解がある。よって

$$\mathrm{P}(5 \mid X) = \frac{21 + 16 + 11 + 6 + 1}{231} = \frac{55}{231} = \frac{5}{21},$$

となり、示すべきことが得られた。

XYZ が 5 で割り切れる場合

5 は素数（prime）であるから、$5 \mid XYZ$ となるのは、5 が X、Y、Z の少なくとも一つを割り切るときであり、かつそのときに限る（0 も 5 で割り切れることに注意せよ）。A、B、C をそれぞれ X、Y、Z が 5 で割り切れる解の集合とする。前の小問より $|A| = |B| = |C| = 55$ である。

$A \cap B$ について：$a, b \geq 0$ かつ $a + b \leq 4$ として $X = 5a$、$Y = 5b$ と書く。このような組の個数は $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ である。そのいずれにおいても $Z = 20 - 5a - 5b$ もまた 5 の倍数となるので、

$$|A \cap B| = |B \cap C| = |C \cap A| = |A \cap B \cap C| = 15.$$

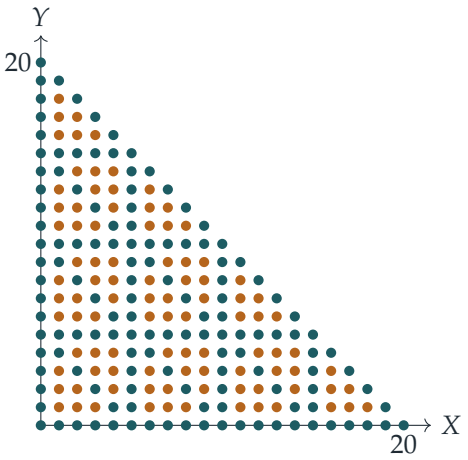
包除原理により

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C| &= 3 \cdot 55 - 3 \cdot 15 + 15 \\ &= 135,\end{aligned}$$

であり、したがって

$$\mathrm{P}(5 \mid XYZ) = \frac{135}{231} = \frac{45}{77}.$$

下の図は、解を $X + Y \leq 20$ を満たす格子点（lattice points）(X, Y) として表したものである。ティール色の点は直線 $X = 5k$、$Y = 5k$、$X + Y = 20 - 5k$（すなわち $Z = 5k$）のいずれかの上にあり、琥珀色の点は X, Y, Z のどれも 5 の倍数でない 96 個の解である。



検算

- 余事象（complement）、すなわち X, Y, Z のどれも 5 の倍数でない解は $231 - 135 = 96$ 個あるはずである。これは図の琥珀色の点である。231 個の解すべてをコンピュータで列挙し、厳密な分数で計算すると、96、$|A \cap B| = 15$、$5/21$、$135/231 = 45/77 \approx 0.584$ が確かめられる。
- $5/21$ の妥当性の確認：X が 5 で割り切れる確率は $1/5$ よりやや大きい。これは X の小さい値ほど起こりやすく、とくに $X = 0$ が最も起こりやすいからである。

よくある間違い

- 0 が 5 で割り切れることを忘れる。$X = 0$ を除くと $5/21$ ではなく $34/231$ になってしまう。

- $3 \times \frac{5}{21}$ と足し合わせてしまい、重なりを何度も数える。ここでは重なりが大きい。二つの変数が 5 の倍数ならば、残りの一つも必ず 5 の倍数になるからである。
- 積の法則が成り立たない具体的な値の組を示さずに、従属性を論じる。

STEP のその先へ

解を一様に（uniformly）無作為に選ぶことは、20 の三つの部分への無作為な**組成**（composition）を選ぶことである。20 を総和 n に置き換えて n を大きくしていくと、$(X/n, Y/n)$ は三角形上の一様分布に近づく。これはディリクレ分布（Dirichlet distribution）の最も簡単な場合である。包除原理は「少なくとも一つ」という事象を扱うための標準的な道具であり、完全順列（derangements）やオイラー（Euler）のトーシェント関数（totient function）でも再び登場する。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、数え上げと独立性の両方の考え方を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。