解答例

STEP I 1998、第 11 問

力学 ・ 滑車にかけた連結質点

> **STEP I 1998、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q11

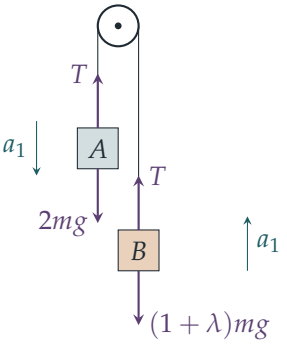
鍵となる考え方

1 回の往復は 2 つの段階からなり、各段階では質量が一定なので加速度（acceleration）も一定であり、$s = \frac{1}{2}at^2$ が使える。下りでは、水で満たされたバケツが鉱石入りのバケツより重く、2 つのバケツは 1 つのアトウッドの器械（Atwood machine）として動く。上りに戻るときは、バケツ A は空で質量がないので、B を引き止めるものは何もない。B は単に自由落下（free fall）する。後半では、「非常に長い時間のうちに最も多くの鉱石を引き上げる」とは「1 周期あたりの鉱石の量を 1 周期の時間で割ったものを最大にする」という意味である。

解答

1 周期の時間

モデル：バケツとその中身は質点、鎖は軽くて伸びず、滑車は小さく、なめらかで軽いとする。したがって張力（tension）T は鎖の両端で等しく、2 つのバケツは同じ速さで動く。A が最上部にあるとき B は最下部にある（鎖の長さは l）ので、各段階で各バケツは距離 l だけ動く。



段階 1：A が下降する。 バケツ A は質量 $2m$ の水を運び、バケツ B の全質量は $m + \lambda m = (1+\lambda)m$ である。共通の加速度を a_1 とする（A は下向き、B は上向き）。各バケツにニュートン（Newton）の第二法則（Newton's second law）を適用すると

$$\begin{aligned} A\,(\text{下向き}): &\quad 2mg - T = 2ma_1, \\ B\,(\text{上向き}): &\quad T - (1+\lambda)mg = (1+\lambda)ma_1. \end{aligned}$$

辺々を加えると T が消去されて

$$(1-\lambda)mg = (3+\lambda)ma_1 \quad\Longrightarrow\quad a_1 = \frac{(1-\lambda)g}{3+\lambda},$$

となる。$\lambda < 1$ よりこれは正であり、確かに A は下降する。静止状態から一定の加速度で距離 l を進むので $l = \frac{1}{2}a_1 t_1^2$ であり、

$$t_1 = \sqrt{\frac{2l}{a_1}} = \sqrt{\frac{2l}{g}}\sqrt{\frac{3+\lambda}{1-\lambda}}.$$

? **考えてみよう** 段階 2 ではバケツ A の質量はまったくない。鎖の張力はいくらか。

段階 2：B が下降する。 このとき A は空なので質量は 0 であり、B の質量は m である。質量のないバケツ A について、ニュートンの法則は $T - 0\cdot g = 0\cdot a$ となるので $T = 0$ である。質量をもつものに何もつながっていない軽い鎖は、何も引っ張ることができない。したがって B は静止状態から加速度 g で距離 l を自由落下し、$l = \frac{1}{2}gt_2^2$ より

$$t_2 = \sqrt{\frac{2l}{g}}.$$

（質量 0 と m に対するアトウッドの器械の公式からも同じ答えが得られる：$a = \frac{m-0}{m+0}g = g$。）この段階の終わりに、A は初めて最上部に戻る。

合計。 A を最上部で放してから初めて最上部に戻るまでの時間は

$$\boxed{t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2l}{g}}\left(1 + \sqrt{\frac{3+\lambda}{1-\lambda}}\right) = \sqrt{\frac{2l}{g}}\,\frac{(1-\lambda)^{1/2} + (3+\lambda)^{1/2}}{(1-\lambda)^{1/2}}}$$

引き上げる鉱石の最大化

1 周期の時間を $\tau(\lambda) = t_1 + t_2$ と書く。各周期で質量 λm の鉱石が引き上げられ、この過程はまったく同じように繰り返される。長い時間 S の間には $\lfloor S/\tau \rfloor$ 回の完全な周期があるので、引き上げられる鉱石は $\lambda m\,(S/\tau - 1)$ 以上 $\lambda m\, S/\tau$ 以下である。S が τ に比べて非常に大きいとき、半端な周期の分は無視でき、引き上げられる鉱石は実質的に

$$\frac{\lambda m S}{\tau(\lambda)} = mS\sqrt{\frac{g}{2l}}\,\frac{\lambda(1-\lambda)^{1/2}}{(1-\lambda)^{1/2} + (3+\lambda)^{1/2}} = mS\sqrt{\frac{g}{2l}}\,\mathrm{f}(\lambda).$$

である。係数 $mS\sqrt{g/2l}$ は λ によらないので、$\mathrm{f}(\lambda)$ ができるだけ大きくなるように $\lambda \in (0,1)$ を選べばよい。

> **考えてみよう** 最適な λ が端点ではなく停留点でなければならないのはなぜか。

$(0,1)$ では $1-\lambda > 0$ かつ $3+\lambda > 0$ であり分母も正なので、関数 f は $(0,1)$ で微分可能（differentiable）である。また f は $(0,1)$ で正であり、両端で 0 に近づく。$\lambda \to 0$ のときは因子 λ が 0 になり（鉱石が運ばれない）、$\lambda \to 1$ のときは因子 $(1-\lambda)^{1/2}$ が 0 になる（バケツがほぼつり合い、段階 1 に非常に長い時間がかかる）。したがって f の最大値は内点でとられ、微分可能な関数が内点で最大となるとき、そこでの導関数は 0 である。よって最適な λ は、求めるとおり $\mathrm{f}'(\lambda) = 0$ を満たす停留点（stationary point）である。

検算

- 極限の場合：$\lambda \to 1$ のとき、段階 1 のバケツの質量は $2m$ と $2m$ になるので $a_1 \to 0$、$t_1 \to \infty$ となり、公式と一致する。
- $\lambda \to 0$ のとき $a_1 = g/3$ となり、質量 $2m$ と m に対する通常のアトウッドの器械の値になる。
- 数値的に、$g = 9.8$ としてランダムな λ と l について運動を時間刻みで計算したところ、公式と一致した。たとえば $\lambda = 0.504$、$l = 26.9$ のとき周期は 8.568 s である。f を数値的に最大化すると $\lambda \approx 0.704$ が得られ、長い時間の中で完全な周期の数を数えても同じ最適な λ が得られる。

よくある間違い

- バケツ B 自体の質量 m を忘れて、段階 1 で $(1+\lambda)m$ の代わりに λm を使ってしまう。
- 段階 2 を何らかの張力のあるアトウッドの器械として扱ってしまう。A に質量がないので、B は自由落下する。
- 単位時間あたりの鉱石ではなく、1 周期あたりの鉱石 λm を最大化してしまう。荷が重いほど周期は遅くなる。

STEP のその先へ

率（1 周期あたりの産出量を 1 周期の時間で割ったもの）を最適化するという考え方は、確率論における **再生報酬定理**（renewal–reward theorem）の背後にある考え方である。そこでは周期の長さが確率的であっても、長期的な報酬率はやはり 1 周期あたりの報酬の平均を周期の長さの平均で割ったものになる。ここでの力学は等加速度運動であり、Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、これを質点系の本格的な扱いへと発展させている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。