解答例

STEP I 1998、第 10 問

力学 ・ 放物運動

STEP I 1998、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/98-s1-q10

鍵となる考え方

投射角（angle of projection）はわからないし、求める必要もない。答えは v、r、t だけで表されるからである。そこで、角を消去する関係式を探す。最もすっきりした方法はベクトルで考えることである。時刻 t における粒子の着地点は、初速度の t 倍に、重力による落下分 $\frac{1}{2}gt^2$ を加えたものである。これら三つのベクトルは直角三角形をなし、あとはピタゴラス（Pythagoras）の定理（三平方の定理）が片づけてくれる。

解答

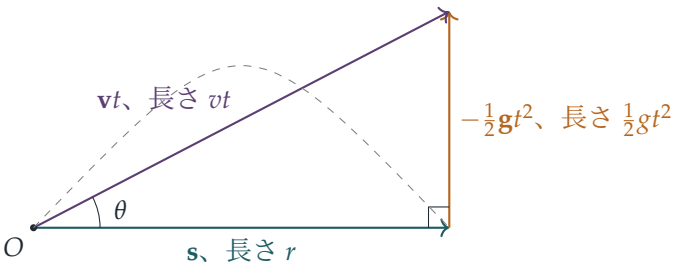
土の各粒子を、重力のみを受けて自由に運動する質点（point particle）としてモデル化する（空気抵抗（air resistance）は無視する）。粒子は地表にある爆発の中心 O から出発する。真上に飛んだ粒子は O に着地するので、$r > 0$ とし、水平面から測った投射角 θ は $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たすとしてよい。

着地時刻

加速度 $\mathbf{g}$（鉛直下向き）が一定のとき、時刻 t における変位は

$$\mathbf{s} = \mathbf{v}t + \tfrac{1}{2}\mathbf{g}t^2,$$

である。ここで $\mathbf{v}$ は大きさ v の初速度である。着地時刻において、$\mathbf{s}$ は長さ r の水平なベクトルである。移項すると $\mathbf{v}t = \mathbf{s} - \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2$ となり、これは長さ r の水平なベクトルと、長さ $\frac{1}{2}gt^2$ の鉛直（上向き）のベクトルの和である。



この二つは直交しているので、ピタゴラスの定理より

$$v^2t^2 = r^2 + \left(\tfrac{1}{2}gt^2\right)^2 = r^2 + \tfrac{1}{4}g^2t^4.$$

両辺に g^2 を掛け、$u = \frac{1}{2}g^2t^2$ とおくと（このとき $u^2 = \frac{1}{4}g^4t^4$、$g^2v^2t^2 = 2v^2u$ である）、これは

$$u^2 - 2v^2u + g^2r^2 = 0,$$

となり、u の二次方程式（quadratic equation）である。その解は

$$\tfrac{1}{2}g^2t^2 = u = v^2 \pm \sqrt{v^4 - g^2r^2},$$

であり、これが求める結果である。

考えてみよう ベクトルを使わないとしたら、どうやって θ を消去すればよいだろうか。

成分を使えばよい。水平方向には $r = vt\cos\theta$ である。鉛直方向には、地表に着地するということから $0 = vt\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$ であり、よって（$t \neq 0$ なので）$vt\sin\theta = \frac{1}{2}gt^2$ となる。これらを 2 乗して加え、$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ を用いると、まさに $v^2t^2 = r^2 + \frac{1}{4}g^2t^4$ が再び得られる。ベクトルによる図は、この計算を三角形として描いたものにすぎない。

二つの解がともに実数となるのは $v^4 \geq g^2r^2$、すなわち $r \leq v^2/g$ のときに限る。これはおなじみの最大到達距離（maximum range）である。$r < v^2/g$ のとき二つの解はともに正であり（積は $g^2r^2 > 0$、和は $2v^2 > 0$）、したがって着地時刻は二つある。一方は急角度の投射、もう一方は浅い角度の投射に対応する。$t = 2v\sin\theta/g$ は θ について増加するので、$+$ の符号は急な軌道（trajectory）$\theta > \frac{\pi}{4}$ に、$-$ の符号は平らな軌道に対応する。

最高点の高さ

飛行は対称である。鉛直方向の速度 $v\sin\theta - gt'$ は、飛行のちょうど中間である $t' = \frac{1}{2}t$ で 0 になる。最高点から、粒子は（鉛直方向には）静止状態から時間 $\frac{1}{2}t$ だけ落下する

ので、最高点の高さは

$$H = \tfrac{1}{2}g\left(\tfrac{1}{2}t\right)^2 = \tfrac{1}{8}gt^2 = \frac{1}{4g}\cdot\tfrac{1}{2}g^2t^2.$$

である。前半の結果を用いると

$$H = \frac{v^2 \pm \sqrt{v^4 - g^2r^2}}{4g},$$

となる。ここで $+$ の符号は急な軌道に、$-$ の符号は平らな軌道に対応する（$r < v^2/g$ のときは両方とも起こりうる。$r = v^2/g$ のときは両者が一致し、$H = v^2/(4g)$ となる）。

検算

- 鉛直投射：$r = 0$ とすると $\frac{1}{2}g^2t^2 = 2v^2$ となり、$t = 2v/g$、$H = v^2/(2g)$ であって、正しい。もう一方の解 $t = 0$、$H = 0$ は、地面すれすれに沿った投射である。
- 二つの高さの和は $v^2/(2g)$ である。これは当然である。二つの軌道は互いに余角 θ と $\frac{\pi}{2} - \theta$ をなし、$\frac{v^2\sin^2\theta}{2g} + \frac{v^2\cos^2\theta}{2g} = \frac{v^2}{2g}$ となるからである。
- 数値的に、$g = 9.8$、$v = 20$、$\theta = 1$ ラジアンとして運動を逐次計算すると、$t \approx 3.4346$、$H \approx 14.450$ を得る。$+$ の符号の公式からは 3.4346 と 14.450 が得られる。余角の場合は $-$ の符号と一致する（$t \approx 2.2053$、$H \approx 5.958$）。

よくある間違い

- 高さを一つしか答えないこと。同じ速さの粒子は二つの異なる経路で同じ点に到達しうるので、$\pm$ は H にまで引き継がれる。
- H を θ で表したところで止めてしまうこと。問題は v、r、g だけで表すことを求めているので、前半と結びつける $H = \frac{1}{8}gt^2$ を使うのが効率的である。

STEP のその先へ

t^2 についての二次方程式は、「軌道の包絡線（envelope of trajectories）」の時間領域版である。$v^4 = g^2r^2$ を満たす点（および地表を離れると回転放物面（paraboloid）$z = \frac{v^2}{2g} - \frac{gr^2}{2v^2}$）は、土が到達しうる領域の境界を表し、その内部のすべての点にはちょうど二つの軌道が当たる。曲線族の包絡線は、大学 1 年次の講義における偏微分（partial differentiation）のよい応用例である。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction*

to Mechanics（力学入門）は、放物運動とベクトルによる運動学をちょうどよい水準で扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。