解答例

STEP I 1998、第 1 問

純粋数学 • 数字のパターンの数え上げ

> **STEP I 1998、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q1

鍵となる考え方

数を書き並べようとしてはいけない。代わりに、まず**どの** 2 つの数字が現れるかを選び、次にその両方を使う 5 桁の文字列を数える。唯一の落とし穴は、数が 0 で始まることはできないという点である。そこで、2 つの数字の一方が 0 であるかどうかで場合分け（case analysis）して数える。また、範囲の両端を確認することも忘れてはならない。

解答

10 000 から 99 999 までの整数はどれもちょうど 5 桁であり、先頭の数字は 0 でない。範囲内に残る整数は 100 000 の 1 つだけであり、これは最後に扱う。

5 桁の数がちょうど 2 種類の数字を含むのは、すべての桁の数字がある組 $\{a,b\}$ から取られ、かつ a と b の両方が実際に現れるときである。そのような数はそれぞれ自分の組を一意に定めるので、組ごとに数えて足し合わせればよい。

場合 1：どちらの数字も 0 でない

$1,2,\ldots,9$ から異なる 2 つの数字を選ぶ方法は $\binom{9}{2} = 36$ 通り（組合せ（combination））である。組 $\{a,b\}$ を固定すると、5 つの位置はそれぞれ a か b のどちらかであり、$2^5 = 32$ 個の文字列ができる。このうち 2 つ（$aaaaa$ と $bbbbb$）は 1 種類の数字しか使わないので、両方を使うものは $32 - 2 = 30$ 個である。これらはどれも 0 で始まらないので、30 個すべてが正真正銘の 5 桁の数である。この場合の個数は

$$36 \times 30 = 1080.$$

考えてみよう 組 $\{0, a\}$ をまったく同じ方法で扱えないのはなぜか。

0 と a から作られる 32 個の文字列のうち半分は 0 で始まり、それらは 5 桁の数ではないからである（たとえば $0a0aa$ は実際には 4 桁の数である）。したがって、数える前に先頭の数字を固定しなければならない。

場合 2：一方の数字が 0 である

もう一方の数字 a は $1, \ldots, 9$ のいずれでもよく、9 通りの選び方がある。先頭の数字は 0 にできないので、a でなければならない。残りの 4 つの位置はそれぞれ 0 か a のどちらかであり、$2^4 = 16$ 通りの可能性がある。このうちちょうど 1 つ、$aaaa$ は 0 を含まず、異なる数字が 1 種類しか残らない。したがって各 a について $16 - 1 = 15$ 個の数があり、この場合の個数は

$$9 \times 15 = 135.$$

端点 100 000

範囲は両端を含み、100 000 は数字 1 と 0 だけを使うので、これも数に入る。

合計

$$1080 + 135 + 1 = 1216.$$

よって、そのような整数は **1216** 個である。

検算

- 10 000 から 100 000 までのすべての整数を調べ、桁の数字の集合の要素数が 2 であるものを数えるコンピュータによる検証では 1216 が得られる。内訳も確認できる。0 を含まないものが 1080 個、含むものが 135 個、それに 100 000 である。
- 手で書き出せる小さな場合に同じ方法を試してみよう。2 桁の数に対しては $\binom{9}{2}(2^2 - 2) + 9(2^1 - 1) = 72 + 9 = 81$ となる。これは直接数えた結果と一致する。2 桁の数は 90 個あり、そこからゾロ目（repdigit）$11, 22, \ldots, 99$ の 9 個を引けばよい。

よくある間違い

- 100 000 を忘れて 1215 とする。「両端を含む」範囲では、必ず端点を確認すること。
- $\binom{10}{2} \times 30 = 1350$ と数える。これには 0 で始まる数が含まれてしまう。

- 場合 2 で 1 ではなく 2 を引く。先頭の数字を a と固定した時点で、すべてが 0 の文字列はすでに除外されている。

STEP のその先へ

$\{a, b\}$ 上のすべての文字列から 1 種類の数字だけの文字列を引くという技法は、包除原理（inclusion–exclusion principle）の最も単純な場合である。一般に、与えられた k 個の記号を**すべて**使う長さ n の文字列の個数は $\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n$ であり、これは第 2 種スターリング数（Stirling number of the second kind）の $k!$ 倍である。このような個数は組合せ論や確率論のいたるところに現れ、たとえばクーポン収集問題（coupon collector problem）にも登場する。この種の数え上げをさらに学びたければ、Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）や、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）にある組合せ論の問題に挑戦するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。