解答例

STEP III 1997、第 9 問

力学 ・ 弾性ばねを含む静力学

> **STEP III 1997、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q9

鍵となる考え方

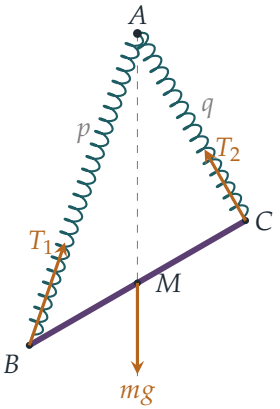
棒にはたらく力は、2 本のばねの張力（tension）と棒の重力の 3 つだけである。互いに平行でない 3 つの力を受けて物体がつり合い（equilibrium）の状態にあるとき、それらの作用線（line of action）は 1 点で交わらなければならない。2 つの張力はどちらも A を通る直線に沿ってはたらくから、重力の作用線も A を通る。したがって、棒の中点は A の真下にある。あとは水平方向への力の分解（resolving horizontally）でほぼ片がつく。

解答

棒を一様（uniform）な剛体（rigid body）とみなし、その質量を m、中点を M とする。ばねは軽く、同じばね定数（spring constant）κ でフックの法則（Hooke's law）に従い、どちらも伸びているとする。ばね AB, AC の自然長（natural length）をそれぞれ a, b、伸びた状態での長さをそれぞれ p, q とすると、張力は

$$T_1 = \kappa(p - a), \qquad T_2 = \kappa(q - b),$$

である。ばねは伸びているので、どちらも正である。



ステップ 1：M は A の真下にある

棒について、A のまわりの力のモーメント（moment）を考える。張力 T_1 は BA に沿って、T_2 は CA に沿ってはたらくので、どちらの作用線も A を通り、A のまわりのモーメントをもたない。よって、M を通って鉛直にはたらく重力も、A のまわりのモーメントが 0 でなければならない。すなわち、M を通る鉛直線は A を通る。したがって M は A の真下にある。A から測った M の深さを $h > 0$ とする。

ステップ 2：水平方向に分解する

A を原点とし、（棒を含む鉛直面内で）水平方向に x 軸、鉛直上向きに y 軸をとる。このとき $M = (0, -h)$ であり、M は BC の中点であるから、ある d, e を用いて

$$B = (-d,\ -h - e), \qquad C = (d,\ -h + e)$$

と書ける。ここで d は棒の水平方向の幅の半分であり、$d \neq 0$ となるのは、ちょうど棒が鉛直でないときである。

ばね AB の張力は、棒の点 B に B から A へ向かう向き、すなわちベクトル $\overrightarrow{BA} = (d,\ h + e)$ の向きにはたらく。このベクトルの長さは p である。よって、この力は $\dfrac{T_1}{p}(d,\ h + e)$ である。同様に、C にはたらく張力は $\dfrac{T_2}{q}(-d,\ h - e)$ である。

水平方向に分解すると

$$\frac{T_1}{p}\,d - \frac{T_2}{q}\,d = 0,$$

となり、$d \neq 0$ であるから

$$\frac{T_1}{p} = \frac{T_2}{q}.$$

考えてみよう 棒が鉛直でないという事実は、正確にはどこで使われたか。

d で割るところだけである。もし棒が鉛直に垂れ下がっていれば、2 本のばねは同じ鉛直線上にあり、水平方向の分解は $0 = 0$ となるだけで、張力の比は鉛直方向のつり合いさえ満たせば何でもよくなる。このような鉛直なつり合いの状態は実際に起こりうるし、その場合には一般に結論は成り立たない。

ステップ 3：フックの法則を用いる

張力を代入すると

$$\frac{\kappa(p-a)}{p} = \frac{\kappa(q-b)}{q} \quad \Longrightarrow \quad 1 - \frac{a}{p} = 1 - \frac{b}{q} \quad \Longrightarrow \quad \frac{a}{p} = \frac{b}{q},$$

よって

$$\frac{p}{q} = \frac{a}{b}.$$

伸びた長さの比は自然長の比に等しい。これが示すべきことであった。 ■

念のため鉛直方向に分解すると $\frac{T_1}{p}(h+e) + \frac{T_2}{q}(h-e) = mg$、すなわち $2h\frac{T_1}{p} = mg$ が得られる。これは証明には不要であるが、$T/$長さ の共通の値を定める。

検算

- **解釈。** $p/q = a/b$ であるから、2 本のばねはどちらも同じ倍率で伸びている。つまり、ある $\lambda > 1$ に対して $p = \lambda a$ かつ $q = \lambda b$ である。したがって、2 本のばねは 1 本の一様なばねを比例的に引き伸ばしたかのようにふるまう。答えを覚えるうえで気持ちのよい見方である。
- **数値的確認。** m, κ, a, b と棒の長さを無作為に選び、ポテンシャルエネルギー（potential energy）$mgy_M + \frac{1}{2}\kappa(p-a)^2 + \frac{1}{2}\kappa(q-b)^2$ を数値的に最小化して、つり合いの位置を求めた。たとえば $a/b = 0.709972$ のとき、傾いたつり合いの位置では $p/q = 0.709972$ となり、M は誤差 10^{-7} 以内で A の真下にあった。同じ探索では、$p/q \neq a/b$ となる鉛直なつり合いの位置も見つかった（たとえば $a/b = 1.526$ に対して $p/q = 1.192$）。これは、仮定が必要であることを裏づけている。

よくある間違い

- 張力が等しい、あるいは 2 本のばねが鉛直方向と等しい角をなすと仮定してしまう。どちらも一般には成り立たない。等しくなるのは、張力を長さで割ったものである。
- M のまわりのモーメントを考えて、角度の計算で混乱する。2 つの張力はどちらも A を通るので、A のまわりのモーメントを考えるほうがはるかに見通しがよい。

- 棒が鉛直でないという条件を一度も使わない。完全な答案では、その条件がどこで必要かを明示する。

STEP のその先へ

ここで用いたベクトル $\frac{T}{p}\overrightarrow{BA}$ は、ばねの力を表す自然な書き方である。自然長が 0 のばねは変位ベクトルにちょうど比例する力を及ぼし、このような「理想的な」ばねを用いると、多くのつり合いの問題が線形代数の問題に帰着する。より一般に、つり合いの位置はポテンシャルエネルギーの停留点（stationary point）である。これが今回の数値的確認の背後にある考え方であり、ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）の出発点でもある。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、静力学（statics）とエネルギーの観点の両方を丁寧に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。