解答例

STEP III 1997、第 8 問

純粋数学 ・ 二次形式の対角化

> **STEP III 1997、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q8

鍵となる考え方

対称行列（symmetric matrix）は二次形式（quadratic form）$ax^2 + 2bxy + cy^2$ を表し、共役をとった行列 $R_{-\alpha} A R_\alpha$ は、座標軸を α だけ回転させた座標で同じ二次形式を表す。この行列を対角行列（diagonal matrix）にすると xy の項が消えるので、新しい座標軸では楕円（ellipse）は標準的な位置にあり、その半軸（semi-axes）の長さをそのまま読み取ることができる。回転（rotation）は原点からの距離を保つので、これらの半軸の長さこそが求めたい距離の最小値と最大値である。

解答

以下を通して、

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad R_{-\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = R_\alpha^{\mathsf{T}}.$$

と書く。

小問 (i)

$C = \cos\alpha$、$S = \sin\alpha$ とおく。まず

$$AR_\alpha = \begin{pmatrix} aC + bS & -aS + bC \\ bC + cS & -bS + cC \end{pmatrix},$$

であり、これに左から $R_{-\alpha}$ を掛けると、右上の成分は

$$\begin{aligned} C(-aS+bC)+S(-bS+cC) &= b(C^2-S^2)-(a-c)SC \\ &= b\cos 2\alpha - \tfrac{1}{2}(a-c)\sin 2\alpha. \end{aligned}$$

となる。A は対称なので、$R_{-\alpha}AR_\alpha = R_\alpha^{\mathsf{T}}AR_\alpha$ も対称である（その転置（transpose）は自分自身に等しい）。よって左下の成分も同じであり、一つの条件で両方が処理できる。この行列が対角行列になるための必要十分条件は

$$\tan 2\alpha = \frac{2b}{a-c} \quad (a \neq c), \qquad \text{したがって} \qquad \alpha = \tfrac{1}{2}\arctan\frac{2b}{a-c}.$$

である（このように α をとればよい）。$a = c$ のときは条件は $b\cos 2\alpha = 0$ となり、$\alpha = \frac{1}{4}\pi$ が条件を満たす（さらに $b = 0$ のときは A がすでに対角行列なので、どの α でもよい）。

小問 (ii)

楕円の方程式を展開すると

$$x^2 + y^2 + 4xy\cot 2\theta + 4x^2\cot^2 2\theta = 1,$$

であり、一方 $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2$ である。係数を比較すると

$$a = 1 + 4\cot^2 2\theta, \qquad b = 2\cot 2\theta, \qquad c = 1.$$

を得る。このとき（$0 < 2\theta < \frac{1}{2}\pi$ より）$a - c = 4\cot^2 2\theta \neq 0$ であり、

$$\frac{2b}{a-c} = \frac{4\cot 2\theta}{4\cot^2 2\theta} = \tan 2\theta,$$

となる。よって $\alpha = \theta$ は小問 (i) の条件を満たし、$R_{-\theta}AR_\theta$ は対角行列である。

対角成分については、小問 (i) と同じ掛け算により

$$\text{左上成分} = aC^2 + 2bSC + cS^2, \qquad \text{右下成分} = aS^2 - 2bSC + cC^2,$$

を得る。ただし今度は $C = \cos\theta$、$S = \sin\theta$ である。$k = \cot 2\theta$、$\mu = \cos 2\theta$ とおき、$2SC = \sin 2\theta$、$k\sin 2\theta = \mu$、$C^2 = \frac{1}{2}(1+\mu)$、$S^2 = \frac{1}{2}(1-\mu)$、$k^2 = \mu^2/(1-\mu^2)$ を用いる。右下成分は

$$\begin{aligned} (1+4k^2)S^2 - 2k\sin 2\theta + C^2 &= 1 + 4k^2S^2 - 2\mu \\ &= 1 - 2\mu + \frac{2\mu^2(1-\mu)}{(1-\mu)(1+\mu)} = \frac{(1-2\mu)(1+\mu)+2\mu^2}{1+\mu} \\ &= \frac{1-\mu}{1+\mu} = \frac{2\sin^2\theta}{2\cos^2\theta} = \tan^2\theta. \end{aligned}$$

となる。まったく同様にして、左上成分は $1+2\mu+\dfrac{2\mu^2}{1-\mu}=\dfrac{1+\mu}{1-\mu}=\cot^2\theta$ である。よって

$$R_{-\theta}AR_\theta=\begin{pmatrix}\cot^2\theta & 0\\ 0 & \tan^2\theta\end{pmatrix}.$$

である。

考えてみよう 計算をやり直さずに、この二つの成分を手早く確かめる方法はあるだろうか？

ある。共役をとってもトレース（trace）と行列式（determinant）は変わらない。ここで $\det A=ac-b^2=1+4k^2-4k^2=1$ であり、実際 $\cot^2\theta\tan^2\theta=1$ となっている。また $\operatorname{tr}A=2+4\cot^2 2\theta$ であり、$\cot\theta-\tan\theta=\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=2\cot 2\theta$ であるから

$$\cot^2\theta+\tan^2\theta=(\cot\theta-\tan\theta)^2+2=4\cot^2 2\theta+2.$$

となる。

小問 (iii)

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=R_\theta\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ によって新しい座標を導入する。すると X 軸と Y 軸は、もとの座標軸を θ だけ回転させたものになる。$\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X & Y\end{pmatrix}R_\theta^{\mathsf{T}}=\begin{pmatrix}X & Y\end{pmatrix}R_{-\theta}$ であるから、楕円の方程式は

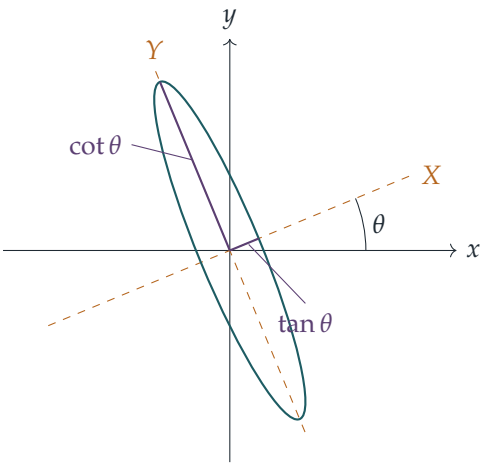
$$\begin{pmatrix}X & Y\end{pmatrix}R_{-\theta}AR_\theta\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=1,\qquad\text{すなわち}\qquad X^2\cot^2\theta+Y^2\tan^2\theta=1.$$

となる。これは $(X,Y)\mapsto(-X,-Y)$ に関して対称なので、中心は原点である。回転は長さを保つので、中心から点までの距離は $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{X^2+Y^2}$ である。

$0<\theta<\frac{1}{4}\pi$ より $0<\tan\theta<1<\cot\theta$ であるから、$\tan^2\theta<\cot^2\theta$ である。楕円上の任意の点について

$$\tan^2\theta\,(X^2+Y^2)\ \le\ X^2\cot^2\theta+Y^2\tan^2\theta=1\ \le\ \cot^2\theta\,(X^2+Y^2),$$

が成り立つので、$\tan^2\theta\le r^2\le\cot^2\theta$、すなわち $\tan\theta\le r\le\cot\theta$ である。左側の不等式は $X=0$ のとき、すなわち $(X,Y)=(0,\pm\cot\theta)$ で等号が成り立ち、右側の不等式は $Y=0$ のとき、すなわち $(X,Y)=(\pm\tan\theta,0)$ で等号が成り立つ。どちらの限界も実際に達成されるので、中心から楕円までの距離の最小値と最大値はそれぞれ $\tan\theta$ と $\cot\theta$ であり、示すべきことが示された。



図は $\theta = \frac{1}{8}\pi$ の場合であり、回転させた座標軸を破線で示している。

検算

- $(0, \pm 1)$ は楕円上にあり、$\tan\theta < 1 < \cot\theta$ であるから、求めた限界と矛盾しない。
- $\theta = \frac{1}{8}\pi$ のとき、長軸（major axis）の端点はもとの座標で $\cot\theta\,(-\sin\theta, \cos\theta) = (-\cos\theta, \cos^2\theta/\sin\theta) \approx (-0.924,\ 2.230)$ である。このとき $\cot 2\theta = 1$ であり、$0.924^2 + (2.230 - 1.848)^2 \approx 0.854 + 0.146 = 1$ となって、確かに楕円上にある。
- 数値的にも、いくつかの θ の値について楕円の周りの 200 000 方向を走査したところ、$\theta = 0.3$ では距離の最小値 0.309336、最大値 3.232728 が得られ、$\tan 0.3$ と $\cot 0.3$ に一致した。

よくある間違い

- xy の係数を $2b$ ではなく b と比較してしまう。二次形式は $ax^2 + 2bxy + cy^2$ である。
- どちらの回転をどこに置くかを取り違える。$\mathbf{x} = R_\theta \mathbf{X}$ とすると行ベクトルは $\mathbf{X}^{\mathsf{T}} R_{-\theta}$ となり、これが $R_{-\theta} A R_\theta$ が現れる理由である。
- 係数の大きい方の軸が長い方の軸だと思い込む。$\cot^2\theta X^2$ の方が係数が大きいので、楕円は X 方向に**短い**。

STEP のその先へ

これはスペクトル定理（spectral theorem）の二次元の場合である。すなわち、任意の実対称行列は回転によって対角化でき、その固有値（eigenvalue）が対角成分となる。二次形式の固有値によって二次曲線（conic）や二次曲面（quadric surface）が分類され、同じ考え方から力学における慣性主軸（principal axes of inertia）や統計学における主成分（principal components）が得られる。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、対称行列と二次形式をとても読みやすく扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。